Aufgabe 1 *(Elliptische Koordinaten)*
Sei $f(z) = (s,t)$, dann gilt

$$st = \frac{1}{4}\left(|z+e_1| + |z-e_1|\right)\left(|z+e_1| - |z-e_1|\right) = \frac{1}{4}\left(|z+e_1|^2 - |z-e_1|^2\right) = \langle z, e_1\rangle$$

insbesondere folgt $z_1 = st$. Weiterhin erhalten wir aus

$$(s-t)^2 = |z-e_1|^2 = (z_1-1)^2 + z_2^2 = (st-1)^2 + z_2^2$$

eine Einschränkung für z_2

$$z_2 = \pm\sqrt{s^2+t^2-s^2t^2-1}.$$

Analog liefert

$$(s+t)^2 = |z+e_1|^2 = (z_1+1)^2 + z_2^2 = (st+1)^2 + z_2^2$$

den gleichen Wert für z_2. Offensichtlich gilt $f_1(z) \geq 1$ für alle z, d.h. für $s < 1$ folgt $f^{-1}(s,t) = \emptyset$ für alle t. Setzt man z_1 und z_2 in f ein, folgt

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(z_1+1)^2+z_2^2} + \sqrt{(z_1-1)^2+z_2^2}, \sqrt{(z_1+1)^2+z_2^2} - \sqrt{(z_1-1)^2+z_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|s+t| + |s-t|, |s+t| - |s-t|\right) \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten $f(z) = (s,t)$, falls $|t| \leq s$. Wir benötigen weiterhin für z_2:

$$(s^2-1)(1-t^2) = s^2+t^2-s^2t^2-1 \geq 0.$$

Zusammen mit $s \geq 1$ sowie $|t| \leq s$ folgt $|t| \leq 1$, d.h. es gilt

$$\mathrm{Im}(f) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 |\ s \geq 1, |t| \leq 1\}$$

und für jedes $(s,t) \in \mathrm{Im}(f)$ sind $z_1 = st$ und $z_2 = \pm\sqrt{s^2+t^2-s^2t^2-1}$ die Lösungen von $f(z) = (s,t)$. f ist keine offene Abbildung, da $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Im}(f)$ in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ abgeschlossen aber nicht offen ist.
Die Menge $M_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 |\ f_1(z) = s_0\}$ ist leer, falls $s_0 < 1$ und für $s_0 \geq 1$ ist es das Bild der Kurven $\gamma_1^+ : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma^+(t) = (s_0 t, \sqrt{s_0^2+t^2-s_0^2t^2-1})$ und $\gamma_1^- : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma^-(t) = (s_0 t, -\sqrt{s_0^2+t^2-s_0^2t^2-1})$. Aus $\gamma^+(1) = \gamma^-(1)$ und $\gamma^+(-1) = \gamma^-(-1)$ folgt, dass der Weg $\gamma := \gamma^+ \oplus \gamma^-$ geschlossen ist. Insbesondere parametrisiert γ eine Ellipse.

Die Menge $M_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 |\ f_2(z) = t_0\}$ ist leer für $|t_0| > 1$ und für $|t_0| \leq 1$ ist M_2 die Spur der Wege $\mu^+ : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\mu^+(s) = (st_0, \sqrt{s^2 + t_0^2 - s^2 t_0^2 - 1})$ und $\mu^- : [1, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\mu^-(s) = (st_0, -\sqrt{s^2 + t_0^2 - s^2 t_0^2 - 1})$. Aus $\mu^+(1) = \mu^-(1)$ folgt, dass $\mu = \mu^+ \oplus \mu^-$ ein Weg ist, welcher eine Hyperbel parametrisiert.

Aufgabe 4 *(Ein globaler Diffeomorphismus)*

Aus der Voraussetzung $\langle Df(x)v, v\rangle > 0$ für alle $x \in \Omega$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ folgt die Invertierbarkeit von $Df(x)$ für alle $x \in \Omega$. Weiterhin ist $f : \Omega \to f(\Omega)$ surjektiv, d.h. es reicht zu zeigen, dass f injektiv ist (in diesem Fall ist f bijektiv und nach Umkehrsatz ist $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ differenzierbar). Angenommen f ist nicht injektiv. Dann gibt es Punkte $x_0 \neq x_1$ mit $f(x_1) = f(x_0)$. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\langle x, x_1 - x_0\rangle}{|x_1 - x_0|}.$$

Da ϕ linear ist, gilt $\phi \in C^\infty$ mit $D\phi(x) = \phi \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle x. Aus $f(x_0) = f(x_1)$ und der Taylorentwicklung folgt nun: es gibt ein $\xi \in \Omega$ auf der Strecke von x_0 nach x_1 mit

$$0 = (\phi \circ f)(x_1) - (\phi \circ f)(x_0) = D(\phi \circ f)(\xi)(x_1 - x_0) = \phi \circ Df(\xi)(x_1 - x_0).$$

Nach Konstruktion von ϕ erhalten wir

$$\langle Df(\xi)(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle = 0,$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.