Aufgabe 3*(Wurf mit Reibung)*
Wir betrachten die Abbildungen

$$x(t,\epsilon) = \frac{v_1}{\epsilon}(1 - e^{-\epsilon t})$$

und

$$y(t,\epsilon) = h - \frac{g}{\epsilon}t + \frac{v_2 + g/\epsilon}{\epsilon}(1 - e^{-\epsilon t}).$$

Aus der Taylorentwicklung $e^{-\epsilon t} = 1 - \epsilon t + \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 - \frac{1}{6}\epsilon^3 t^3 + \cdots$ folgt die stetige Fortsetzbarkeit von $x(t,\epsilon)$ und $y(t,\epsilon)$ für $\epsilon \to 0$ mit $x(t,0) = v_1 t$ und $y(t,0) = h + v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$. Weiterhin sind die Fortsetzungen stetig differenzierbar für alle $t, \epsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t,\epsilon) = v_1 \cdot e^{-\epsilon t} \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(t,\epsilon) = -\frac{g}{\epsilon}(1 - e^{-\epsilon t}) + v_2 e^{-\epsilon t}$$

sowie

$$\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t,0) = \lim_{s\to 0}\frac{x(t,s) - x(t,0)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{v_1(t - st^2/2 + O(s^2)) - v_1 t}{s} = -\frac{v_1 t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \epsilon}(t,0) &= \lim_{s\to 0}\frac{y(t,s) - y(t,0)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{h - \frac{g}{s}t + (v_2 + g/s)(t - st^2/2 + s^2t^3/6 + O(s^3)) - (h + v_2 t - gt^2/2)}{s} \\ &= \frac{1}{6}gt^3 - \frac{1}{2}v_2 t^2\end{aligned}$$

Die Zeit $T(\epsilon)$ ist implizit gegeben durch $y(T(\epsilon),\epsilon) = 0$. Wir benutzen jetzt den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass es genau so eine stetig differenzierbare Funktion T gibt. Aus der Voraussetzung folgt $y(T(0),0) = 0$ und wir erhalten aus $\frac{\partial y}{\partial t}(t,0) = -gt + v_2$ die Invertierbarkeit von $\frac{\partial y}{\partial t}(T(0),0) = -gT(0) + v_2$ (es gilt $v_2 - gT(0) < 0$, da $T(0) > 0$, $g, h > 0$ und

$$0 = y(T(0),0) = h + T(0)(v_2 - \frac{1}{2}gT(0))$$

liefert $v_2 - gT(0)/2 < 0$, damit auch $v_2 - gT(0) < 0$). Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es nahe 0 eine Funktion $T = T(\epsilon)$ mit $y(T(\epsilon),\epsilon) = 0$. Insbesondere folgt

$$T'(0) = -\frac{\partial_\epsilon y(T(0),0)}{\partial_t y(T(0),0)} = \frac{gT(0)^3}{6(gT(0) - v_2)} - \frac{v_2 T(0)^2}{2(gT(0) - v_2)}$$

Die Wurfweite ist jetzt durch

$$w(\epsilon) = x(T(\epsilon),\epsilon),$$

gegeben. Eine kleine Rechnung zeigt, dass x und y 2-mal stetig differenzierbar sind, insbesondere ist auch T eine C^2 Funktion. Also ist w 2-mal stetig differenzierbar und aus der Taylorentwicklung folgt

$$w(\epsilon) = w(0) + w'(0)\epsilon + o(\epsilon).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} w'(0) &= \frac{\partial x}{\partial t}(T(0), 0) \cdot T'(0) + \frac{\partial x}{\partial \epsilon}(T(0), 0) = v_1 T'(0) - \frac{v_1}{2} T(0)^2 \\ &= \frac{g v_1 T(0)^3}{6(gT(0) - v_2)} - \frac{v_1 v_2 T(0)^2}{2(gT(0) - v_2)} - \frac{v_1}{2} T(0)^2 = -\frac{g v_1 T(0)^3}{3(gT(0) - v_2)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4*(eine Untermannigfaltigkeit)*
Die Menge $M = \{(x, y) |\; xy = 0\}$ ist gegeben durch

$$M = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $M \setminus \{0\}$ die disjunkte Vereinigung von 4 offenen Intervallen U_i

$$M \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \times \{0\} \cup (0, \infty) \times \{0\} \cup \{0\} \times (-\infty, 0) \cup \{0\} \times (0, \infty).$$

Jeder Punkt $p \in M \setminus \{0\}$ liegt also in genau einem U_i, und da $(0, \infty)$ eine 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, gilt dies natürlich auch für die U_i per Definition. Insbesondere ist $M \setminus \{0\}$ die disjunkte Vereinigung von 4 eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten, und damit selbst eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit (vgl. Definition, oder benutze Satz 2.2). Noch zu zeigen: M ist keine Untermannigfaltigkeit. Dazu benutzen wir das Graphenkriterium. Angenommen M ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es (hinreichend kleine) offene Intervalle I, J um 0 sowie eine C^1 Abbildung $g : I \to J$ mit

$$\{t, g(t) | t \in I\} = M \cap I \times J = I \times \{0\} \cup \{0\} \times J.$$

Dies liefert aber einen Widerspruch (sonst folgt $g(t) = 0$ und $J = \{0\}$, aber $J \subset \mathbb{R}$ ist offene Umgebung von $\{0\}$).