

### Aufgabe 3 (Wärmeleitungsgleichung)

Die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, u(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung  $\partial_t u = \Delta u$ . Wir erhalten

$$\partial_t u = -\frac{n}{2t} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (4\pi t)^{-n/2} \frac{|x|^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_i u = -(4\pi t)^{-n/2} \frac{x_i}{2t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

sowie

$$\partial_i^2 u = \partial_i \partial_i u = -\frac{1}{2t} (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + (4\pi t)^{-n/2} \frac{x_i^2}{4t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Damit folgt

$$\partial_t u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = \Delta u$$

### Aufgabe 4 (Ausgleichsgerade)

Die Ausgleichsgerade  $y = ax + b$  zu den Messdaten  $\{(x_k, y_k) : k = 1, \dots, N\}$  ist dadurch bestimmt, dass der Punkt  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  die Quadratsumme

$$f(a, b) := \sum_{k=1}^N (ax_k + b - y_k)^2$$

minimiert.

Es gilt mit  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$  und  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2 \sum_{k=1}^N (ax_k + b - y_k) = 2N(a\bar{x} + b - \bar{y}).$$

Da  $f(a, \cdot)$  ein quadratisches Polynom mit  $\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2N > 0$  ist, folgt  $f(a, b) \geq f(a, b_a)$  für  $b_a = \bar{y} - a\bar{x}$ . Nun gilt

$$f(a, b_a) = \sum_{k=1}^N (a(x_k - \bar{x}) - (y_k - \bar{y}))^2.$$

Im Fall  $x_k = \bar{x}$  für alle  $k$  folgt  $f(a, b) \geq \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2$ , mit Gleichheit genau für  $b = b_a$  und  $a$  beliebig. Andernfalls berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} f(a, b_a) &= 2 \sum_{k=1}^N (a(x_k - \bar{x}) - (y_k - \bar{y}))(x_k - \bar{x}) \\ &= 2a \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2 - 2 \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}). \end{aligned}$$

In diesem Fall wird  $f(a, b)$  also minimal genau für

$$a = \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad \text{und} \quad b = \bar{y} - \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \bar{x}.$$

Der Wert des Minimums beträgt

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2 - \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2}.$$