

Aufgabe 2 (Produktregel)

Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann ist $f \cdot g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar mit

$$D(fg)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - (f(x_0)g(x_0) + g(x_0)Df(x_0)(h) + f(x_0)Dg(x_0)(h))}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + Df(x_0)(h))}{2|h|} (g(x_0 + h) + g(x_0)) \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))Df(x_0)(h)}{2|h|} \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - (g(x_0) + Dg(x_0)(h))}{2|h|} (f(x_0 + h) + f(x_0)) \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))Dg(x_0)(h)}{2|h|} \\ &= 0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{2} Df(x_0) + 0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{2} \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2} Dg(x_0) = 0 \end{aligned}$$

da f und g stetig in x_0 und differenzierbar in x_0 existieren die Grenzwerte.

Aufgabe 4 (Ableitung der p -Norm)

Für $0 \neq y \in \mathbb{R}$ folgt aus $|y|' = \operatorname{sgn}(y)$ und $|y| = \operatorname{sgn}(y) \cdot y$ die Ableitung

$$(|y|^p)' = p \cdot \operatorname{sgn}(y) \cdot |y|^{p-1} = p \cdot |y|^{p-2} \cdot y$$

Sei jetzt $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) = \|x\|_p$, dann gilt

$$\partial_j f(x) = \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1-p}{p}} \cdot p \cdot |x_j|^{p-2} \cdot x_j = \frac{|x_j|^{p-2} \cdot x_j}{(\|x\|_p)^{p-1}}$$

Da $p > 1$, ist $\partial_j f$ stetig für alle $x \neq 0$ (j ist natürlich auch beliebig). Behauptung: f ist nicht in $x = 0$ differenzierbar. Es reicht zu zeigen, dass $\partial_j f$ in $x = 0$ nicht existiert

$$\partial_j f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + te_j) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} = \text{existiert nicht.}$$

Damit erhalten wir: $f(x) = \|x\|_p$ ist stetig differenzierbar für alle $x \neq 0$ und in $x = 0$ ist f nicht differenzierbar. Der Gradient von f im Punkt $x \neq 0$ ist gegeben durch

$$\text{grad}(f) = \frac{1}{(\|x\|_p)^{p-1}} \cdot (|x_1|^{p-2}x_1, \dots, |x_n|^{p-2}x_n)$$