Aufgabe 2 *(Integration von Matrix-Funktionen)*
Wir zeigen die Behauptung komponentenweise

$$\int_a^b \big(A(t)v\big)_i \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \int_a^b \big(A(t)_{ij} v_j\big)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \Big(\int_a^b A(t)_{ij}\mathrm{d}t\Big)\cdot v_j$$
$$= \sum_{j=1}^n \Big(\int_a^b A(t)\mathrm{d}t\Big)_{ij} v_j = \Bigg(\Big(\int_a^b A(t)\mathrm{d}t\Big) v\Bigg)_i$$

Aufgabe 4*(Konvexe Mengen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, so dass jede Konvexkombination von Punkten in M wieder in M liegt. Dann gilt insbesondere für $x_1, x_2 \in M$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ($\lambda_1 = 1 - \lambda_2$):

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1) \in M,$$

d.h. M ist konvex (die Strecke von x_1 nach x_2 liegt ganz in M, da $\lambda_2 \in [0,1]$ beliebig ist). Umgekehrt sei M konvex. Wir zeigen durch Induktion über k das jede Konvexkombination von k Punkten in M wieder in M liegt. Der Fall $k = 1$ beziehungsweise $k = 2$ ist klar, da wir M als konvex voraussetzen. Seien $x_1, \dots, x_k \in M$, dann setzen wir voraus, dass

$$x := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$$

in M enthalten ist für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$. Sei jetzt $x_{k+1} \in M$. Zu zeigen ist, dass

$$\mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k + \mu_{k+1} x_{k+1} \in M$$

für alle $\mu_1, \dots, \mu_{k+1} \in [0,1]$ mit $\sum \mu_j = 1$. Falls $\mu_{k+1} = 1$, dann $\mu_j = 0$ für $j = 1 \dots k$ und nach Voraussetzung ist $\mu_{k+1} x_{k+1} = x_{k+1}$ in M enthalten. Für $\mu_{k+1} < 1$ wählen wir $\lambda_j := \mu_j/(1 - \mu_{k+1}) \geq 0$. Da $\sum_{j=1}^k \mu_j = 1 - \mu_{k+1}$ folgt $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ und insbesondere $\lambda_j \in [0,1]$. Nach Voraussetzung gilt $x = \sum \lambda_j x_j \in M$ und wir erhalten

$$\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j x_j = \mu_{k+1} x_{k+1} + (1 - \mu_{k+1}) \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = \mu_{k+1} x_{k+1} + (1 - \mu_{k+1}) x$$
$$= x_{k+1} + (1 - \mu_{k+1})(x - x_{k+1}) \in M$$

(da M konvex, $1 - \mu_{k+1} \in (0,1]$).
Aufgabe 5*(Stützhyperebenen)*
Sei $x \in \partial M$, dann gilt nach Definition von ∂M für alle k: $B_{\frac{1}{k}}(x) \cap M \neq \emptyset$ und

$B_{\frac{1}{k}}(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. Damit können wir einen Punkt $p_k \in B_{\frac{1}{k}}(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M)$ wählen. Da $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen ist (M ist abgeschlossen) gibt es für jedes k ein $\epsilon_k > 0$ mit $B_{\epsilon_k}(p_k) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$. Insbesondere gilt

$$dist(M, p_k) = \inf_{y \in M} |y - p_k| > \epsilon_k > 0$$

Da M abgeschlossen ist, gibt es ein $x_k \in M$ mit

$$|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k| > 0.$$

Aus der Konvexität von M folgt aber auch, dass x_k eindeutig ist. Falls es $x_k \in M$ und $x_k' \in M$ gibt mit

$$|x_k - p_k| = |x_k' - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|$$

dann folgt für $z = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_k' \in M$:

$$|z - p_k| = \left| \frac{1}{2}(x_k - p_k) + \frac{1}{2}(x_k' - p_k) \right| \leq \frac{1}{2}|x_k - p_k| + \frac{1}{2}|x_k' - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|,$$

d.h. auch $z \in M$ minimiert das Funktional $M \ni y \mapsto |y - p_k|$. In dieser Gleichung ist $=$ aber nur möglich, wenn $x_k - p_k$ und $x_k' - p_k$ linear abhängig sind. Umgekehrt, falls in der Gleichung $<$ gilt, so ist dies ein Widerspruch zur Definition von x_k und x_k'. Sei jetzt $c(x_k - p_k) = x_k' - p_k$ für ein $c \in \mathbb{R}$, dann folgt aus obiger Gleichung

$$|z - p_k| = \frac{1}{2}|x_k - p_k| + \frac{|c|}{2}|x_k - p_k| = \frac{|c| + 1}{2}|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|,$$

insbesondere gilt $c = \pm 1$. Falls $c = -1$, dann erhalten wir aus $x_k - p_k = -(x_k' - p_k)$: $p_k = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_k' \in M$, d.h. $p_k \in M$ (da $x_k, x_k' \in M$ und M konvex) was ein Widerspruch zu $p_k \in \mathbb{R}^n \setminus M$ ist. Also gilt $c = 1$ und $x_k = x_k' = z$, d.h. es gibt genau ein $x_k \in M$ mit

$$|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|.$$

Da M konvex ist, erhalten wir nach Konstruktion des Punktes x_k:

$$\langle x_k - p_k, y - p_k \rangle \geq 0$$

für alle $y \in M$. Denn angenommen $\langle x_k - p_k, y - p_k \rangle < 0$, dann besitzt das Dreieck, welches durch die Punkte x_k, y und p_k aufgespannt wird einen Winkel $90° < \gamma < 180°$, und fällt man das Lot vom Punkt p_k auf die Strecke von x_k nach y, so liefert dies einen Punkt $w = tx_k + (1 - t)y \in M$ mit der Eigenschaft

$$|w - p_k| < |x_k - p_k|$$

was ein Widerspruch zur Konstruktion von x_k ist. Für den Vektor

$$\nu_k := \frac{x_k - p_k}{|x_k - p_k|}$$

gilt $|\nu_k| = 1$, d.h. $\nu_k \in S^{n-1}$ für alle k. S^{n-1} ist aber kompakt, es gibt demnach eine konvergente Teilfolge von (ν_k). Bezeichnet ν den Grenzwert dieser Teilfolge, dann erhalten wir aus $x = \lim p_k$

$$\langle \nu, y - x \rangle = \lim_{k \to \infty} \left\langle \frac{x_k - p_k}{|x_k - p_k|}, y - p_k \right\rangle \geq 0$$

für alle $y \in M$. Dies liefert die Behauptung:

$$M \subset \{ y \in \mathbb{R}^n | \, \langle \nu, y - x \rangle \geq 0 \}.$$