Aufgabe 2 *(120° Winkel)*
a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

$$|v + w| \leq |v| + |w|$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind. Für $t \in [0, 1]$ erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= |t(x-a) + (1-t)(y-a)| + |t(x-b) + (1-t)(y-b)| \\ &\quad + |t(x-c) + (1-t)(y-c)| \\ &\leq t(|x-a| + |x-b| + |x-c|) + (1-t)(|y-a| + |y-b| + |y-c|) \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

und = ist nur möglich für $t \in (0, 1)$, wenn $x - a = \alpha_1(y - a)$, $x - b = \alpha_2(y - b)$ sowie $x - c = \alpha_3(y - c)$ für bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Unter der Annahme $x \neq y$ bezeichnen wir die von x, y erzeugte Gerade mit L, d.h. $L = \{x + s(y - x) | s \in \mathbb{R}\}$. Sollte also für $t \in (0, 1)$ und $x \neq y$ in der obigen Ungleichung ein = gelten, dann folgt aus der linearen Abhängigkeit, dass a, b, c Punkte auf der Geraden L sind. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass a, b, c die Eckpunkte eines Dreieckes sind. Deshalb ist die Funktion f strikt konvex.
b) Sei

$$\delta := \max\{|a - b|, |a - c|, |b - c|\}$$

und definiere $V = \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) \leq 2\delta\}$. Da f stetig, V kompakt und $f(x) > 2\delta$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus V$ gilt, folgern wir, dass f ein Minimum besitzt und dieses in V annimmt (beachte $V \neq \emptyset$ da $a, b, c \in V$). Dieses Minimum ist eindeutig, denn unter der Annahme es gibt $x_1 \neq x_2$ mit

$$f(x_1) = f(x_2) = \inf_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)$$

dann erhalten wir aus der strikten Konvexität von f für den Punkt $z = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$:

$$f(z) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = f(x_1) = f(x_2)$$

was ein Widerspruch zur Minimaltät von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ ist.
c) Die Funktion f ist differenzierbar für alle $x \notin \{a, b, c\}$, und falls $f(x)$ das Minimum ist, dann gilt notwendigerweise $Df(x) = 0$. Wir erhalten aus

$$Df(x) = \left(\frac{x_1 - a_1}{|x-a|} + \frac{x_1 - b_1}{|x-b|} + \frac{x_1 - c_1}{|x-c|}, \frac{x_2 - a_2}{|x-a|} + \frac{x_2 - b_2}{|x-b|} + \frac{x_2 - c_2}{|x-c|} \right)$$

und $Df(x) = 0$:

$$0 = (x-a)|x-b||x-c| + (x-b)|x-a||x-c| + (x-c)|x-a||x-b|.$$

Das Skalarprodukt dieses Vektor mit $x-a$, $x-b$ und $x-c$ liefert

$$0 = |x-a|^2|x-b||x-c| + \langle x-a, x-b\rangle\,|x-a||x-c| + \langle x-a, x-c\rangle\,|x-a||x-b|$$
$$0 = \langle x-b, x-a\rangle\,|x-b||x-c| + |x-b|^2|x-a||x-c| + \langle x-b, x-c\rangle\,|x-a||x-b|$$
$$0 = \langle x-c, x-a\rangle\,|x-b||x-c| + \langle x-c, x-b\rangle\,|x-a||x-c| + |x-c|^2|x-a||x-b|$$

Aus diesen 3 Gleichungen folgt nun

$$\frac{\langle x-a, x-b\rangle}{|x-a||x-b|} = \frac{\langle x-a, x-c\rangle}{|x-a||x-c|} = \frac{\langle x-b, x-c\rangle}{|x-b||x-c|} = -\frac{1}{2} = \cos(120°).$$

Aufgabe 4*(Binomialreihe*
Es gilt

$$f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

d.h.

$$f^{(k)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

und die Taylorentwicklung (vom Grad k) von f um den Punkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j + R_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j} x^j + R_k(x).$$

wobei $\binom{\alpha}{0} = 1$ und $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$. Aus der Lagrangedarstellung des Restgliedes folgt

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}x^{k+1} = \binom{\alpha}{k+1}(1+\xi)^{\alpha-k-1}x^{k+1}$$

für ein $\xi \in [0, x]$ (bzw. $\xi \in [x, 0]$, falls $x < 0$). Da $\xi \in [0, 1)$ erhalten wir

$$0 \leq (1+\xi)^{\alpha-k-1} \leq 1$$

für $k+1 \geq \alpha$, d.h. es reicht zu zeigen, dass $|\binom{\alpha}{k+1}| \cdot x^{k+1}$ eine Nullfolge in k ist für ein beliebiges $x \in [0, 1)$. Dazu betrachten wir

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k} \right| = x \cdot \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| = x \in [0, 1)$$

und aus Analysis I Vorlesung (Quotientenkriterium) erhalten wir die Behauptung: Die Taylorreihe von f konvergiert gegen f.