Aufgabe 1 *(mehrdimensionale Taylorreihe)*
Es gilt

$$D^\alpha f = |\alpha|! \cdot f^{|\alpha|+1}$$

Dies folgt durch Induktion: $D^\alpha f = f$ für $\alpha = (0, \ldots, 0)$ und für $\alpha' = \alpha + e_i$ (e_i ist i-te Einheitsvektor) liefert $\partial_i f = 1/(1 - \sum x_i)^2 = f^2$ die Behauptung

$$D^{\alpha'} f = \partial_i D^\alpha f = |\alpha|! \cdot (|\alpha| + 1) f^{|\alpha|} \cdot \partial_i f = |\alpha'|! \cdot f^{|\alpha'|+1}.$$

Da $f(0) = 1$ folgt für die Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

Betrachtet man die geometrische Reihe, so folgt für f und $|\sum x_i| < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sum x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

(die letzte Gleichung erhält man aus der Polynomialgleichung, vgl. Vorlesung). Deshalb konvergiert die Taylorreihe für alle x mit $|\sum x_i| < 1$ und insbesondere konvergiert sie dann gegen die Funktion f.

Aufgabe 4 *(Maximumprinzip)*
Sei $\triangle u > 0$ in Ω, dann kann u sein Maximum nicht in Ω annehmen (falls $\xi \in \Omega$ das Maximum ist, so ist $D^2 u(\xi)$ negative semidefinit und da $\triangle u(\xi) = \mathrm{tr}((D^2 u)(\xi))$ gilt am Punkt ξ: $\triangle u(\xi) \leq 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $\triangle u > 0$ ist). Es gelte jetzt $\triangle u \geq 0$ in Ω. Betrachte die Funktion $v := u + \epsilon |x|^2$ für $\epsilon > 0$. Die Funktionen v und $|x|^2$ sind enthalten in $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Weiterhin gilt $\triangle |x|^2 = 2n > 0$ und da $\triangle$ ein linearer Operator ist, folgt aus $\triangle u \geq 0$ die strikte Ungleichung $\triangle v = \triangle u + 2n\epsilon > 0$ in Ω für alle $\epsilon > 0$. Insbesondere nimmt $v = u + \epsilon |x|^2$ sein Maximum auf dem Rand von Ω an:

$$\max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial \Omega} v.$$

Dann gilt aber auch

$$\max_{\overline{\Omega}} u + \epsilon \min_{\overline{\Omega}} |x|^2 \leq \max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial \Omega} v \leq \max_{\partial \Omega} u + \epsilon \max_{\partial \Omega} |x|^2$$

Betrachtet man den Grenzwert $\epsilon \to 0$, dann folgt

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u.$$