Aufgabe 2*(Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen)*
Die Kurve c besitzt Anfangspunkt $c(0) = (0,0)$ und Endpunkt $c(1) = (1,1)$ für alle s. Es gilt $c'(t) = (1, st^{s-1})$ und folglich

$$\int_c F\overrightarrow{\mathrm{d}x} = \int_0^1 \langle F(c(t)), c'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big\langle (t^{s+1}, t^{2s}), (1, st^{s-1})\big\rangle \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (t^{s+1} + st^{3s-1})\mathrm{d}t = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}$$

Aufgabe 4*(Strecken sind kürzeste Verbindungen)*
Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in C^1 ist. Sei $v \in \mathbb{R}^n$, dann gilt folgende Ungleichung (nach Cauchy Schwarz auf dem $\mathbb{R}^n$)

$$L(\gamma) \cdot |v| = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot |v| \;\mathrm{d}t \geq \int_a^b \langle \gamma'(t), v\rangle \,\mathrm{d}t = \left\langle \int_a^b \gamma'(t)\mathrm{d}t, v \right\rangle$$

Weiterhin gilt = genau dann, wenn $\gamma'(t) = \alpha(t)v$ für alle $t \in [a,b]$ und eine Funktion $\alpha : [a,b] \to [0,\infty)$. Wähle jetzt (verwende Hauptsatz der Integralrechnung)

$$v = \int_a^b \gamma'(t)\mathrm{d}t = \gamma(b) - \gamma(a)$$

dann folgt

$$L(\gamma) \geq |v| = |\gamma(a) - \gamma(b)|$$

mit = genau dann, wenn $\gamma'(t)$ ein Vielfaches von v ist für alle t. Insbesondere gilt = genau dann wenn $\langle \gamma'(t), \gamma(b) - \gamma(a)\rangle \geq 0$ und

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \{\gamma(a) + t(\gamma(b) - \gamma(a))|\; t \in [0,1]\}$$

d.h. $\gamma(t) = \gamma(a) + f(t)(\gamma(b) - \gamma(a))$ wobei $f : [a,b] \to [0,1]$ monoton wachsend ist mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$ ($f(t) = \int_a^t \alpha(s)\mathrm{d}s$ wobei $\gamma'(s) = \alpha(s)v$)
Sei jetzt $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stückweise C^1, d.h. γ ist stetig und es gibt eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ derart, dass $\gamma_i : (t_{i-1}, t_i) \to \mathbb{R}^n$ eine C^1 Kurve ist. Die Dreiecksungleichung besagt

$$|u - v| \leq |u - w| + |v - w|$$

mit $=$ genau dann dann, wenn w auf der Verbindungsstrecke von u und v liegt. Insbesondere liefern die obigen Ausführungen und das N fache Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} L(\gamma_i) \geq \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| \geq |\gamma(0) - \gamma(1)|.$$

In der letzten Gleichung ist $=$ aber nur möglich wenn $\gamma(t_i)$ auf der Verbindungsstrecke von $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ liegt für alle $i = 1 \ldots N-1$ (insbesondere sind $\gamma(t_i)$ angeordnet auf der Menge $[0,1]$, d.h. $|\gamma(0) - \gamma(t_i)| \leq |\gamma(0) - \gamma(t_j)|$ für $i < j$). Der Fall

$$L(\gamma) = |\gamma(0) - \gamma(1)|$$

gilt also genau dann, wenn $\langle \gamma'(t), \gamma(1) - \gamma(0) \rangle \geq 0$ für alle $t \in [0,1] \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ und

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \{\gamma(0) + t(\gamma(1) - \gamma(0)) | \; t \in [0,1]\}.$$

Insbesondere, $\gamma(t) = \gamma(0) + f(t)(\gamma(1) - \gamma(0))$ wobei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig und monoton wachsend ist mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.