Aufgabe 1 *(Zentralkraftfelder)*
Sei $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $rf(r)$ (z.B. wird eine Stammfunktion durch $h(r) = r\int_1^r f(s)\mathrm{d}s - \int_1^r \int_1^t f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ gegeben). Definiere $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = h(|x|)$ so folgt

$$\text{grad } g(x) = h'(|x|) \cdot \text{grad } |x| = |x|f(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} = f(|x|)x = F(x)$$

d.h. g ist eine Stammfunktion von F.
Aufgabe 3*(Konstruktion einer Stammfunktion)*
Wir betrachten die Wege $\gamma_x(t) = tx$, $\gamma_{x+he_j}(t) = t(x + he_j)$ und

$$\gamma(t) = t(x + he_j) + (1 - t)x = t \cdot h \cdot e_j + x$$

auf $[0, 1]$ und für hinreichend kleine $h \in \mathbb{R}$, e_j ist j-te Einheitsvektor. Sei $\mu = \gamma_x \oplus \gamma$ die Verknüpfung der Wege, d.h. wir definieren $\mu : [0, 1] \to \Omega$ durch $\mu(t) = \gamma_x(2t)$ für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ und $\mu(t) = \gamma(2t - 1)$ für $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Dann besitzen γ_{x+he_j} und μ gleiche Anfangs und Endpunkte und die Kurven sind affin homotop (vgl. Lemma 1.6 Skript). Insbesondere ist für hinreichend kleine h die affine Homotopie enthalten in Ω sowie

$$\varphi(x + he_j) = \int_{\gamma_{x+he_j}} F\mathrm{d}\vec{x} = \int_\mu F\mathrm{d}\vec{x} = \int_{\gamma_x} F\mathrm{d}\vec{x} + \int_\gamma F\mathrm{d}\vec{x} = \varphi(x) + \int_\gamma F\mathrm{d}\vec{x}$$

Aus $\gamma'(t) = he_j$ folgt damit für alle $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) &= \lim_{h\to0} \frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\int_\gamma F\mathrm{d}\vec{x}}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\int_0^1 \langle F(t \cdot h \cdot e_j + x), he_j\rangle \,\mathrm{d}t}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \int_0^1 \langle F(t \cdot h \cdot e_j + x), e_j\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \langle F(x), e_j\rangle \,\mathrm{d}t = \langle F(x), e_j\rangle\end{aligned}$$

(man beachte, dass $\int_0^1 \langle F(t \cdot h \cdot e_j + x), e_j\rangle \,\mathrm{d}t$ stetig von h abhängt). Dies liefert grad $\varphi(x) = F(x)$.