Aufgabe 1 *(Zur Cauchyschen Integralformel)*
Wir parametrisieren $\partial D_1(0)$ durch die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi \mathbf{i} t}$ und den Rand $\partial D_\epsilon(z)$ durch die Kurve $\mu : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\mu(t) = z + \epsilon \cdot e^{2\pi \mathbf{i} t}$. Wir betrachten folgende Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C},\ (t,s) \mapsto (1-s)z + f(s) \cdot e^{2\pi \mathbf{i} t}$$

wobei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist mit $f(0) = \epsilon$ und $f(1) = 1$. Dann gilt $H(t,0) = \mu(t)$ und $H(t,1) = \gamma(t)$. Wir wählen jetzt $f(s) := \epsilon + s(1-\epsilon)$, dann folgt aus der Linearität von f, dass H stetig ist (H ist sogar Lipschitzstetig da S^1 kompakt), d.h. H ist eine geschlossene Homotopie von γ und μ. Noch zu zeigen ist, dass $\mathrm{Im}(H) \subset \overline{D_1(0)} \setminus D_\epsilon(z)$. Dies folgt aber unmittelbar aus folgender Überlegung: Der Kreis $H(s,.)$ um den Punkt $(1-s)z$ bzgl. der Homotopie H besitzt Radius $f(s)$. Damit dieser Kreis den Ball $D_\epsilon(z)$ schneidet, muss $f(s) < s|z| + \epsilon$ gelten für ein $s \in [0,1]$ (der Abstand von $(1-s)z$ zu z ist $s|z|$, und falls sich die beiden Mengen schneiden, so schneiden sie sich insbesondere in dem Punkt, welcher auf der Geraden durch z und 0 liegt). $|z| < 1$, $\epsilon > 0$ und

$$f(s) = \epsilon(1-s) + s \geq s + \epsilon \geq s|z| + \epsilon$$

liefern aber einen Widerspruch. Weiterhin ist der Kreis $H(s,.)$ enthalten in $\overline{D_1(0)}$. Sonst ist der Punkt auf $H(s,.)$ welcher die Gerade durch z und 0 schneidet nicht in $\overline{D_1(0)}$ enthalten, insbesondere gilt dann

$$g(s) = (1-s)|z| + f(s) = |z| + \epsilon + s(1 - |z| - \epsilon) > 1$$

g ist aber linear mit $g(0) = |z| + \epsilon < 1$ (nach Voraussetzung) und $g(1) = 1$, d.h. $g(s) \leq 1$ für alle $s \in [0,1]$. Damit folgt

$$H(s,.) \subset \overline{D_1(0)} \setminus D_\epsilon(z)$$

für alle $s \in [0,1]$ und folglich $\mathrm{Im}(H) \subset \overline{D_1(0)} \setminus D_\epsilon(z)$.

Aufgabe 3*(einfacher Zusammenhang)*
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ein Polygonzug mit den Eckpunkten $a_0, \ldots, a_N$. Da $a_j \neq 0$ für alle j, können wir oBdA annehmen, dass a_j und a_{j+1} linear unabhängig sind (sonst betrachte eine kleine Störung von a_{j+1} und entsprechende homotope Änderung des Polygonzuges). Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ deart gewählt, dass die Anzahl der Elemente der Menge

$$B(v) = \{j \in \{0, \ldots, N-1\} | v, a_j, a_{j+1} \text{ sind linear abhängig}\}$$

minimal ist. Angenommen $B(v)$ ist nicht leer, dann gibt es ein $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ so dass v, a_k, a_{k+1} linear abhängig sind. Da aber $n \geq 3$ vorausgesetzt wurde, gibt es

auch einen Vektor $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass w, a_k, a_{k+1} linear unabhängig sind. Wir betrachten jetzt den Vektor $v' = v + tw$ für hinreichend kleines t. Falls v, a_j, a_{j+1} linear unabhängig sind, so gilt dies natürlich auch für die Vektoren v', a_j, a_{j+1}. Weiterhin sind aber auch die Vektoren v', a_k, a_{k+1} linear unabhängig, was ein Widerspruch zur Definition von v ist (in diesem Fall besitzt die Menge $B(v')$ weniger Elemente als $B(v)$ und v ist nach Definition so gewählt, dass $B(v)$ minimal ist). Damit gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, der nicht linear abhängig ist zu den paarweise Vektoren a_j, a_{j+1} für alle $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, insbesondere trifft die Gerade, welche durch v erzeugt wird, keine der Kanten des Polygonzuges γ, d.h. $\mathbb{R}v \cap \mathrm{Im}(\gamma) = \emptyset$.
Wir betrachten jetzt die Homotopie

$$H^1 : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ (t,s) \mapsto (s-1)\gamma(t) + s\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

dann gilt $\mathrm{Im}(H) \cap \mathbb{R}v = \emptyset$. Inbesondere ist das Bild der Kurve $\mu(t) := H(t,1) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ enthalten in der Menge $S^{n-1} \setminus \{p\}$, wobei $p := v/|v|$. Aus Anwesenheitsaufgabe 3 Serie 8 ist bekannt, dass $S^{n-1} \setminus \{p\}$ einfach zusammenhängend ist. Es gibt also eine (geschlossene) Homotopie $H^2 : [a,b] \times [0,1] \to S^{n-1} \setminus \{p\}$ mit $H^2(t,0) = \mu(t)$ und $H^2(t,1) = q \in S^{n-1}$ für alle $t \in [a,b]$. Definiere

$$H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ (t,s) \mapsto \begin{cases} H^1(t,2s) & s \in [0,1/2] \\ H^2(t,2s-1) & s \in [1/2,1] \end{cases}$$

dann ist H eine (geschlossene) Homotopie mit $H(t,0) = \gamma(t)$ und $H(t,1) = q = \text{const}$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend für alle $n \geq 3$ (Stetigkeit von H folgt durch kurze Überlegung).
S^{n-1} ist einfach zusammenhängend für $n \geq 3$. Dazu betrachten wir die Polarkoordinatenabbildung,

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times S^{n-1},\ x \mapsto \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right).$$

Φ ist stetig mit stetiger Umkehrabbildung $(r,\theta) \mapsto r\theta$, d.h. Φ ist ein Homoömorphismus. Ist $\gamma : [a,b] \to S^{n-1}$ ein geschlossener Weg auf S^{n-1}, dann definiert $\mu(t) := \Phi^{-1}(1, \gamma(t))$ einen geschlossenen Weg in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es eine (geschlossene) Homotopie H von μ und einem konstanten Weg. Sei $\mathrm{pr} : (0,\infty) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ die Projektion (stetig), dann liefert $\mathrm{pr} \circ \Phi \circ H$ eine (geschlossene) Homotopie von γ und einem konstanten Weg auf S^{n-1}. Folglich ist S^{n-1} einfach zusammenhängend für alle $n \geq 3$.