Aufgabe 1 *(Einheitskugeln von Normen)*
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Zeichnen Sie die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ für die euklidische und für diese beiden Normen in den Fällen $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 *(Abschluss und Inneres)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\mathrm{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$ für alle offenen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $\partial(\partial M) = \partial M$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 *(Ein Abstand auf $\mathbb{R}$)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit $d(x,y) = \arctan|x-y|$ ein metrischer Raum wird, dessen offene Mengen dieselben sind wie für die euklidische Metrik.

Aufgabe 4 *(Produktmengen)*
Seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) A, B offen $\quad \Rightarrow \quad A \times B$ offen

(2) A, B abgeschlossen $\quad \Rightarrow \quad A \times B$ abgeschlossen

(3) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 23.4.2007 bis 9:15.