

Aufgabe 1 (*Elliptische Koordinaten*)

Bestimmen Sie für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(z) = \frac{1}{2} (|z + e_1| + |z - e_1|, |z + e_1| - |z - e_1|),$$

und für jedes $\zeta = (s, t) \in \mathbb{R}^2$ die Menge $\{z : f(z) = \zeta\}$. Beschreiben Sie auch die Mengen $\{z : f_1(z) = s_0\}$ und $\{z : f_2(z) = t_0\}$ für feste $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Ist f eine offene Abbildung?

Aufgabe 2 (*Graphendarstellung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Es sei $P \circ DF(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, wobei

$$P : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, P(x, z) = x.$$

Zeigen Sie: es gibt einen C^1 -Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$ zwischen offenen Umgebungen U von x_0 und V von $y_0 := P \circ F(x_0)$ sowie eine Funktion $u \in C^1(V)$, so dass gilt:

$$F \circ \phi^{-1}(y) = (y, u(y)) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Bemerkung: Hat $DF(x_0)$ den Rang n , so ist $P \circ DF(x_0)$ invertierbar nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten.

Aufgabe 3 (*Zahl der Urbilder*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Es gelte

- (1) f ist stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar.
- (2) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in \Omega$.
- (2) $y \notin f(\partial\Omega)$.

Zeigen Sie, dass die Menge $f^{-1}\{y\}$ der Urbilder von y endlich ist. Illustrieren Sie, dass keine der Voraussetzungen (1), (2) oder (3) weggelassen werden kann.

Aufgabe 4 (*Ein globaler Diffeomorphismus*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gelte

$$\langle Df(x)v, v \rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass $f : \Omega \rightarrow f(\Omega) = \Omega^*$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Hinweis: Betrachten Sie für die Injektivität $\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0 \rangle$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 2.7.2007 bis 9:15.