

Aufgabe 1 (*Gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten*)

Bearbeiten Sie die Teilaufgaben (a) und (b).

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 4\}$ im Punkt $(2, \sqrt{3}, 1)$ eine Tangentialebene hat, und berechnen Sie diese.
- (b) Zeigen Sie: die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 3, xz = 2\}$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Bestimmen Sie mit der Multiplikatorenregel von Lagrange die Punkte auf M , die am nächsten zum Nullpunkt sind.

Aufgabe 2 (*Hüllkurve*)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $f(x) = xf'(x) - e^{f'(x)}$.

- (a) Zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(x) = ax + b$.
- (b) Bestimmen Sie mit Legendretransformation eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph durch die Geraden in (a) berührt wird (Skizze).
- (c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele verschiedene C^1 -Lösungen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit $f(1) = -1$ gibt.

Aufgabe 3 (*Wurf mit Reibung*)

Beim schiefen Wurf aus der Höhe $h > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = (v_1, v_2)$ und der Erdbeschleunigung g ist die Bahnkurve $(x(t), y(t))$, $t \in [0, T(\varepsilon)]$, gegeben durch die Formeln

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} \left(v_1 t, h + v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \right) & \varepsilon = 0 \\ \left(\frac{v_1}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}), h - \frac{g}{\varepsilon} t + \frac{v_2 + g/\varepsilon}{\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon t}) \right) & \varepsilon \neq 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ der Reibungsparameter, und $T(\varepsilon)$ ist der Zeitpunkt des Aufschlags in Höhe $y = 0$. Zeigen Sie für die Wurfweite $w(\varepsilon)$ die Näherung

$$w(\varepsilon) = w(0) - \frac{g}{3} \frac{v_1 T(0)^3}{g T(0) - v_2} \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Aufgabe 4 (*eine Untermannigfaltigkeit*)

Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht ganz M .

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 9.7.2007 bis 9:15.