**Aufgabe 1** *(Picard-Iteration)*
Berechnen Sie den $k$-ten Schritt $X_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf für das Matrix-Anfangswertproblem

$$X' = AX \quad X(0) = \mathrm{E}_2 \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 2** *(Abhängigkeit von den Anfangsdaten)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$. Zeigen Sie für zwei Lösungen $x, y : (\alpha, \beta) \to \Omega$, $\alpha < 0 < \beta$, der zugehörigen Differentialgleichung die Abschätzung

$$|x(t) - y(t)| \le e^{L|t|}\, |x(0) - y(0)|.$$

**Aufgabe 3** *(Räuber-Beute-Modell)*
Die Funktionen $x, y \in C^1(I)$ seien Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

Zeigen Sie: für $H(x, y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha y - \beta y$ ist $H(x(t), y(t))$ konstant. Folgern Sie, dass die Lebensdauer einer Lösung mit Anfangsdaten $x_0, y_0 > 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

**Aufgabe 4** *(Flusslinien)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für eine maximale Lösung $x : (\alpha, \beta) \to \Omega$ von $x' = f(x)$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(a) $x$ ist injektiv.

(b) $x$ ist periodisch, das heißt $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ und es gibt ein $p > 0$ mit $x(t + p) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

*Hinweis.* Eine konstante Lösung bezeichnet man eigentlich nicht als periodisch, aber hier ist sie unter (b) mit einbegriffen.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 16.7.2007 bis 9:15.*