Aufgabe 1 *(Picard-Iteration)*
Berechnen Sie den k-ten Schritt $X_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf für das Matrix-Anfangswertproblem

$$X' = AX \quad X(0) = \mathrm{E}_2 \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(Abhängigkeit von den Anfangsdaten)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$. Zeigen Sie für zwei Lösungen $x, y : (\alpha, \beta) \to \Omega$, $\alpha < 0 < \beta$, der zugehörigen Differentialgleichung die Abschätzung

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{L|t|}\, |x(0) - y(0)|.$$

Aufgabe 3 *(Räuber-Beute-Modell)*
Die Funktionen $x, y \in C^1(I)$ seien Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y \end{aligned}$$

Zeigen Sie: für $H(x, y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha y - \beta y$ ist $H(x(t), y(t))$ konstant. Folgern Sie, dass die Lebensdauer einer Lösung mit Anfangsdaten $x_0, y_0 > 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4 *(Flusslinien)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für eine maximale Lösung $x : (\alpha, \beta) \to \Omega$ von $x' = f(x)$ genau eine der folgenden Aussagen gilt:

(a) x ist injektiv.

(b) x ist periodisch, das heißt $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ und es gibt ein $p > 0$ mit $x(t + p) = x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis. Eine konstante Lösung bezeichnet man eigentlich nicht als periodisch, aber hier ist sie unter (b) mit einbegriffen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 16.7.2007 bis 9:15.