Aufgabe 1 *(Eulersche Identität)*
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0 \quad$ (f ist homogen vom Grad α).

(2) $Df(x)x = \alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis. Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 2 *(Produktregel)*
Die Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ seien im Punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Beweisen Sie die Produktregel: $fg : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls in x_0 differenzierbar und es gilt

$$D(fg)(x_0) = Df(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, Dg(x_0).$$

Aufgabe 3 *(Ableitung von* det*, Teil I)*
Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$, differenzierbar ist und zeigen Sie für die Ableitung

$$Df(E_n)H = \operatorname{tr}(H) \quad \text{für alle } H \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Hinweis. $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$.

Aufgabe 4 *(Ableitung der p-Normen)*
Untersuchen Sie auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie den Gradienten:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\; f(x) = \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{mit } p \in (1, \infty).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 7.5.2007 bis 9:15.