Aufgabe 1 *(Ableitung von* det*, Teil II)*
Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f : R^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$, an einer beliebigen Stelle A mit $\det(A) \neq 0$ wie folgt gegeben ist:

$$Df(A)H = \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}H) \quad \text{für alle } H \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Hinweis: Es gilt $\det(A + tH) = \det(A)\,\det(A^{-1}(A + tH))$ (wieso?). Verwenden Sie Aufgabe 3, Serie 3.

Aufgabe 2 *(Integration von Matrix-Funktionen)*
Sei $I = [a, b]$. Bestätigen Sie für $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{m\times n})$ die Formel

$$\int_a^b A(t)v\,dt = \left(\int_a^b A(t)\,dt\right) v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 3 *(Eine C^∞-Funktion)*
Zeigen Sie, dass nachstehende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ liegt:

$$\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Aufgabe 4 *(Konvexe Mengen)*
$x \in \mathbb{R}^n$ heißt Konvexkombination von $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, falls $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ für $\lambda_i \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn jede Konvexkombination von Punkten in M wieder in M liegt.

Aufgabe 5 *(Stützhyperebenen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie: zu jedem $x \in \partial M$ gibt es ein $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, so dass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x\rangle \geq 0\}.$$

Man nennt dann $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x\rangle = 0\}$ eine Stützhyperebene in $x \in \partial M$.
Anleitung. Wähle $p_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $p_k \to x$, und bestimme $x_k \in M$ mit $|x_k - p_k| = \inf_{y\in M} |y - p_k|$. Nach Wahl einer Teilfolge konvergiert $(x_k - p_k)/|x_k - p_k|$ gegen ein ν wie verlangt (was zu zeigen ist).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Es sind vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten bis Montag, 14.5.2007 bis 9:15.