Aufgabe 1 *(mehrdimensionale Taylorreihe)*
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n \neq 1\}$. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1 - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

mit Entwicklungspunkt $x = 0$. Für welche x konvergiert die Reihe, und konvergiert sie dann gegen die Funktion f?

Aufgabe 2 *(Integrale mit variablen Grenzen)*
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $I = [a, b]$. Die Funktion $f \in C^0(U \times I)$ sei nach $x \in U$ stetig partiell differenzierbar, also $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(U \times I)$. Beweisen Sie für differenzierbare Funktionen $\varphi, \psi : U \to (a, b)$ die Regel

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy + f\big(x, \psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$\phi : U \times (a, b) \times (a, b) \to \mathbb{R},\ \phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dy,$$

und wenden Sie (mit Begründung) die Kettenregel an.

Aufgabe 3 *(Faltung)*
Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, das heißt $\overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Überlegen Sie, dass für $f \in C^0(\mathbb{R})$ die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int f(y) g(x - y)\, dy$$

wohldefiniert und in $C^1(\mathbb{R})$ ist mit Ableitung $F'(x) = \int f(y) g'(x - y)\, dy$.

Aufgabe 4 *(Maximumprinzip)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
Hinweis. Zeigen Sie das erst im Fall $\Delta u > 0$, und betrachten Sie dann $u + \varepsilon\varphi$ mit einer geeigneten Hilfsfunktion φ.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 28.5.2007 bis 9:15.