
Aufgabe 1 (*Astroide*)
Auf einem Kreis mit Radius vier rollt innen ein Kreis mit Radius eins ab. Die Kurve c, die ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis dabei beschreibt, heißt Astroide. Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Astroide mit $c(0) = (4, 0)$. Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Bogenlängenfunktion der Astroide.

Aufgabe 2 *(Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen)*
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_c F \cdot ds$ für $F(x, y) = (xy, y^2)$ und $c(t) = (t, t^s)$ mit $0 \leq t \leq 1$ und $s \in (0, \infty)$.

Aufgabe 3 *(Eine Flächenformel)*
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$ für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x),$$

wobei γ jeweils eine Parametrisierung des Randes der folgenden Gebiete in $\mathbb{R}^2$ ist:

(a) Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, (x_1, y_1) und (x_2, y_2).

(b) Ellipse mit den Halbachsen $a, b > 0$.

(c) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ 0 < y < f(x)\}$, wobei $f \in C^1([a, b])$ mit $f \geq 0$.

Aufgabe 4 (*Strecken sind kürzeste Verbindungen*)
Zeigen Sie für $\gamma \in PC^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ die Ungleichung

$$L(\gamma) \geq |\gamma(0) - \gamma(1)|,$$

und diskutieren Sie den Gleichheitsfall.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 11.6.2007 bis 9:15.