Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 07, Serie 8
Ernst Kuwert — 11. Juni 2007

Aufgabe 1 *(Zentralkraftfelder)*
Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das rotationssymmetrische Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ F(x) = f(r)x \quad \text{mit } r(x) = |x|$$

eine Stammfunktion.

Aufgabe 2 *(Konjugiert harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, das heißt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v \in C^2(\Omega)$ gibt mit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aufgabe 3 *(Konstruktion einer Stammfunktion)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bzgl. $0 \in \Omega$, und sei $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für alle $1 \leq i, j \leq n$. Für $x \in \Omega$ setzen wir

$$\gamma_x : [0, 1] \to \Omega,\ \gamma_x(t) = tx.$$

Zeigen Sie explizit (ohne Satz 3.2 der Vorlesung zu verwenden), dass wie folgt eine Stammfunktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ von F gegeben ist:

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}.$$

Aufgabe 4 *(Rotationsfreie Felder auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$)*
Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) F hat eine Stammfunktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$.

(2) Für $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt $\int_c F \cdot \vec{dx} = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe Montag, 18.6.2007 bis 9:15.