Analysis II

Sommersemester 2007

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

6 Differentiation im $\mathbb{R}^n$ **1**
1 Topologie im $\mathbb{R}^n$ 1
2 Partielle Ableitungen 8
3 Die Ableitung 12

7 Anwendungen der Differentialrechnung **20**
1 Schrankensatz 20
2 Extremwerte und konvexe Funktionen 23
3 Taylorentwicklung 29
4 Parameterabhängige Integrale 37

8 Kurvenintegrale und komplexe Analysis **40**
1 Kurvenintegrale 40
2 Komplexe Analysis 53

9 Lokale Auflösung von Gleichungen **59**
1 Diffeomorphismen 59
2 Implizite Funktionen 66

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen **73**
1 Existenz und Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem 73
2 Lineare Differentialgleichungen 80

Kapitel 6

Differentiation im $\mathbb{R}^n$

1 Topologie im $\mathbb{R}^n$

Hier wiederholen wir kurz die topologischen Grundbegriffe im $\mathbb{R}^n$. Das griechische Wort $\tau\acute{o}\pi o\varsigma$ bedeutet soviel wie Ort oder Lage. Mathematisch geht es in der Topologie um Mengen mit einem Konvergenzbegriff, und stetige Abbildungen zwischen diesen Mengen. Unser Interesse gilt natürlich hauptsächlich Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, wir beginnen aber mit dem allgemeinen Begriff des metrischen Raums. Zum einen werden uns metrische Räume später vielfach begegnen, zum anderen wird so klarer, auf welche Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ es hier ankommt.

Definition 1.1 (Metrischer Raum) *Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Funktion $d : X \times X \to [0,\infty)$, die für alle $x, y, z \in X$ folgende Eigenschaften hat:*

Positivität: $d(x, y) \geq 0$ *mit Gleichheit genau wenn* $x = y$,

Symmetrie: $d(y, x) = d(x, y)$

Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Wir nennen $d(x, y)$ auch den Abstand von x und y.

In dieser Definition kann X eine beliebige Menge sein, insbesondere muss X kein Vektorraum sein. Betrachten Sie als Beispiel die Menge X aller Bahnhöfe in Frankreich und

$$d(x,y) = \begin{cases} \text{minimale Fahrzeit von } x \text{ nach } y \text{ über Paris} & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Viele interessante metrische Räume sind normierte Vektorräume.

Definition 1.2 (Norm) *Eine Norm auf dem reellen (oder komplexen) Vektorraum X ist eine Funktion $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

Positivität: $\|x\| \geq 0$, *mit Gleichheit genau wenn* $x = 0$.

Halblinearität: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$.

Das wichtigste Beispiel ist natürlich die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, also

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Die Positivität und die Halblinearität ergeben sich dabei leicht, für die Dreiecksungleichung haben wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz gebraucht, siehe Satz 3.5 in Kapitel 2. Andere Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zum Beispiel die 1-Norm und die Maximumsnorm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \tag{1.3}$$

Jeder normierte Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ wird zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand von zwei Punkten x, y erklären durch

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X. \tag{1.4}$$

Denn offensichtlich gilt $d(x, y) \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x = y$, sowie

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\,\|x - y\| = d(x, y), \\ d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein metrischer Raum mit dem üblichen euklidischen Abstandsbegriff.

Definition 1.3 *Sei X ein metrischer Raum. Die offene Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ ist*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Bezüglich der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$ gilt also wie gewohnt

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Es ist instruktiv, sich die Kugeln $B_r(x_0)$ für die französische Eisenbahnmetrik aus (1.1) sowie die Kugeln $B_1(0)$ für die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ zu überlegen.

Definition 1.4 *Sei X eine metrischer Raum. Eine Menge $\Omega \subset X$ heißt offen, falls zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.*

Beispiel 1.1 Die Kugel $B_r(x_0)$ ist offen im Sinn der Definition 1.4. Sei nämlich $x \in B_r(x_0)$ gegeben. Dann ist $\varepsilon = r - d(x, x_0) > 0$ und für $y \in B_\varepsilon(x)$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = r,$$

also $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$, was zu zeigen war.

Satz 1.1 *Für die offenen Teilmengen eines metrischen Raums X gilt:*

(a) *$\emptyset, X$ sind offen.*

(b) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

(c) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

Beweis: Aussage (a) ist klar. Für (b) sei $x \in \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$, wobei $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ endlich viele offene Teilmengen von X sind. Dann gibt es $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$. Es folgt $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_i > 0$ sowie $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_i}(x) \subset \Omega_i$ für jedes i, das heißt $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N \Omega_i$.

Für (c) sei nun $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, wobei Λ eine beliebige Indexmenge ist. Dann ist $x \in \Omega_{\lambda_0}$ für (mindestens) ein $\lambda_0 \in \Lambda$. Da Ω_{λ_0} offen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega_{\lambda_0}$, also erst recht $B_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$. □

Ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen ist nicht notwendig offen, zum Beispiel ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(0) = \{0\}$$

nicht offen in $\mathbb{R}^n$. Eine offene Menge $\Omega \subset X$ mit $x \in \Omega$ nennt man auch offene Umgebung von x. Insbesondere wird die offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ als ε-Umgebung von x bezeichnet.

Lemma 1.1 *In einem metrischen Raum X gibt es zu zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.*

Beweis: Sei $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y)$. Dann folgt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\varepsilon$. Also ist die Behauptung richtig für jedes $\varepsilon \leq \frac{1}{2} d(x,y)$. □

Definition 1.5 *Sei X ein metrischer Raum. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, falls gilt:*

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{R}$ mit $x_k \in B_\varepsilon(x)$ für alle $k > K$.

Äquivalent dazu ist $d(x_k, x) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, denn wäre $y \neq x$ ebenfalls Grenzwert von (x_k), so wählen wir $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 1.1 und erhalten für k hinreichend groß den Widerspruch

$$x_k \in B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

Definition 1.6 *Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt abgeschlossen, wenn folgende Implikation stets gilt:*

$$x_k \in A, \quad x_k \to x \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Satz 1.2 *In einem metrischen Raum X gilt für jede Menge $M \subset X$:*

$$M \textit{ offen} \quad \Leftrightarrow \quad X \backslash M \textit{ abgeschlossen}.$$

Beweis: Kapitel 2, Satz 3.7. □

Folgerung 1.1 *Für die abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums X gilt:*

a) *$\emptyset, X$ sind abgeschlossen.*

b) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

c) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis: Folgt aus Satz 1.1 und Satz 1.2. □

Die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen ist nicht notwendig abgeschlossen, zum Beispiel $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n},1] = (0,1] \subset \mathbb{R}$.

Beispiel 1.2 (Relativtopologie) Ist (X,d) metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $M \subset X$ selbst ein metrischer Raum mit der induzierten Abstandsfunktion

$$d_M : M \times M \to [0,\infty),\ d_M(x,y) = d(x,y). \tag{1.5}$$

Zum Beispiel ist die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ein metrischer Raum mit dem euklidischen Abstand $d_{\mathbb{S}^{n-1}}(x,y) = |x-y|$. Für die Kugeln bezüglich der induzierten Abstandsfunktion gilt

$$B_r^M(x) = \{y \in M : d_M(y,x) < r\} = \{y \in M : d(y,x) < r\} = B_r(x) \cap M.$$

Ist $\tilde{U}$ offen in X, so ist $\tilde{U} \cap M$ offen in (M,d_M). Denn für $x \in \tilde{U} \cap M$ gilt $B_\varepsilon(x) \subset \tilde{U}$ für geeignetes $\varepsilon > 0$, also $B_\varepsilon^M(x) \subset \tilde{U} \cap M$. Umgekehrt ist jede offene Menge $U \subset (M,d_M)$ von dieser Form: zu $x \in U$ gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U$. Die Menge

$$\tilde{U} = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

ist als Vereinigung offener Kugeln offen in X, und es gilt

$$U \subset \tilde{U} \cap M = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}(x) \cap M = \bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon(x)}^M(x) \subset U.$$

Entsprechendes gilt für die abgeschlossenen Mengen, das heißt eine Menge $A \subset (M,d_M)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie von der Form $A = \tilde{A} \cap M$ ist mit $\tilde{A}$ abgeschlossen in X.

In der eindimensionalen Analysis wurden meist Funktionen auf einem Intervall I mit Randpunkten $a < b$ betrachtet. Im mehrdimenionalen Fall werden wir oft Kugeln $B_r(x)$ oder achsenparallele Quader $I_1 \times \ldots \times I_n$ betrachten, bisweilen aber auch kompliziertere Mengen. Dafür sind die folgenden Begriffe nützlich.

Definition 1.7 *Sei X ein metrischer Raum und $M \subset X$. Dann definieren wir*

$$\begin{aligned}
\operatorname{int} M &= \{x \in M : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset M\} \quad \text{(Menge der inneren Punkte von } M\text{)},\\
\overline{M} &= \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset\} \quad \text{(Abschluss von } M\text{)},\\
\partial M &= \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ sind } B_\varepsilon(x) \cap M,\ B_\varepsilon(x) \cap (X \backslash M) \neq \emptyset\} \quad \text{(Rand von } M\text{)}.
\end{aligned}$$

Trivialerweise gilt $\operatorname{int} M \subset M \subset \overline{M}$. Außerdem ist $\operatorname{int} \Omega = \Omega$ für $\Omega \subset X$ offen sowie $\overline{M} = M$ für $M \subset X$ abgeschlossen.

Beispiel 1.3 Auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Abstandsfunktion $d(x,y) = |x-y|$ gilt für die Kugel $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) < r\}$:

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\} \quad \text{und} \quad \partial B_r(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(y,x) = r\}.$$

Als erstes zeigen wir $\overline{B_r(x)} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\}$. Zu $y \in \overline{B_r(x)}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in B_r(x)$ mit $d(y,z) < \varepsilon$, also $d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x) < \varepsilon + r$, und mit $\varepsilon \to 0$ folgt $d(y,x) \leq r$. Analog ergibt sich die Inklusion $\overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \geq r\}$, denn zu $y \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)}$ gibt es ein $z \in \mathbb{R}^n \backslash B_r(x)$ mit $d(y,z) < \varepsilon$, also $d(y,x) \geq d(z,x) - d(y,z) > r - \varepsilon$, und mit $\varepsilon \to 0$ folgt $d(y,x) \geq r$. Aber $\mathbb{R}^n \backslash B_r(x) \subset \overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)}$, und somit $\overline{\mathbb{R}^n \backslash B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \geq r\}$. Ist nun $d(y,x) \leq r$, so folgt für $0 < \theta < 1$ hinreichend nahe bei Eins

$$d(x + \theta(y-x), x) = \theta|y-x| < r \quad \text{und} \quad d(x+\theta(y-x), y) = (1-\theta)|x-y| < \varepsilon,$$

das heißt $y \in \overline{B_r(x)}$ und somit $\overline{B_r(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) \leq r\}$. Wegen $\partial B_r(x) = \overline{B_r(x)} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \backslash B_r(x))}$ folgt schließlich $\partial B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y,x) = r\}$.

Satz 1.3 *Sei M Teilmenge des metrischen Raums X.*

(a) $\operatorname{int} M$ *ist offen, und es gilt die Implikation*

$$\Omega \text{ offen}, \Omega \subset M \quad \Rightarrow \quad \Omega \subset \operatorname{int} M.$$

(b) $\overline{M}$ *ist abgeschlossen, und es gilt die Implikation*

$$A \text{ abgeschlossen}, A \supset M \quad \Rightarrow \quad A \supset \overline{M}.$$

(c) ∂M *ist abgeschlossen und es gilt* $\partial M = \overline{M} \backslash \operatorname{int} M$.

Beweis: Für (a) sei $x \in \operatorname{int} M$, also $B_r(x) \subset M$ für ein $r > 0$. Für $y \in B_r(x)$ gilt dann $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x) \subset M$ mit $\varepsilon = r - d(y,x) > 0$, vgl. Beispiel 1.1. Es folgt $B_r(x) \subset \operatorname{int} M$, damit ist $\operatorname{int} M$ offen. Sei nun Ω offen und $\Omega \subset M$. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, also auch $B_\varepsilon(x) \subset M$, das heißt $x \in \operatorname{int} M$.

Für (b) verwenden wir (a) und Satz 1.2. Nach Definition ist $X \backslash \overline{M} = \operatorname{int}(X \backslash M)$, also ist $\overline{M} = X \backslash \operatorname{int}(X \backslash M)$ abgeschlossen. Ist nun $A \subset X$ eine beliebige abgeschlossene Menge mit $A \supset M$, so ist $X \backslash A$ offen sowie $X \backslash A \subset X \backslash M$, also $X \backslash A \subset \operatorname{int}(X \backslash M)$ nach (a), und somit $A \supset \overline{M}$. Dies beweist (b).

Nach Definition gilt weiter $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(X \backslash M)}$, also ist ∂M abgeschlossen nach (b) und Folgerung 1.1. Ferner ist ebenfalls nach Definition $X \backslash \operatorname{int} M = \overline{X \backslash M}$, folglich

$$\partial M = \overline{M} \cap (X \backslash \operatorname{int} M) = \overline{M} \backslash \operatorname{int} M.$$

□

Im Abschluss von M können noch zwei Sorten Punkte unterschieden werden, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte.

Definition 1.8 *Ein Punkt $x \in X$ heißt*

$$\begin{aligned} \text{Häufungspunkt von } M \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0 \textit{ ist } B_\varepsilon(x) \cap M \backslash \{x\} \textit{ nichtleer}, \\ \text{isolierter Punkt von } M \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{es gibt ein } \varepsilon > 0 \textit{ mit } M \cap B_\varepsilon(x) = \{x\}. \end{aligned}$$

Ist $x \in X$ Häufungspunkt von M, so enthält $B_\varepsilon(x) \cap M \backslash \{x\}$ sogar unendlich viele Punkte. Denn würde die Menge nur aus endlich vielen Punkten $y_1, \ldots, y_N$ bestehen, so ist $\delta = \min_{1 \leq i \leq N} d(y_i, x) > 0$ und dann $B_\delta(x) \cap M \backslash \{x\} = \emptyset$, ein Widerspruch. Insbesondere können wir eine Folge $x_k \in M \backslash \{x\}$ bestimmen mit $x_k \to x$.

Definition 1.9 *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X heißt dicht, falls $\overline{M} = X$.*

Bekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ im metrischen Raum $\mathbb{R}$, beziehungsweise die rationalen Punkte $\mathbb{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.10 (Stetigkeit) *Sei D Teilmenge eines metrischen Raums X, und Y ein weiterer metrischer Raum. Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } d(x, x_0) < \delta,$$

oder äquivalent mit $f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Die Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Wir müssten hier eigentlich $d_X(\cdot, \cdot)$ und $d_Y(\cdot, \cdot)$ schreiben, denn im allgemeinen sind X und Y verschiedene metrische Räume, jedoch führt die einfachere Notation nicht zu Missverständnissen.

Definition 1.11 (Lipschitzstetigkeit) *Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt Lipschitzstetig mit Konstante $L \geq 0$, falls*

$$d(f(x), f(x')) \leq L\, d(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in D.$$

Beispiel 1.4 Die Abstandsfunktion von einem Punkt $x_0 \in X$, das heißt

$$f : X \to \mathbb{R},\ f(x) = d(x, x_0),$$

ist Lipschitzstetig mit Konstante $L = 1$, denn aus der Dreiecksungleichung folgt

$$f(x) = d(x, x_0) \leq d(x, x') + d(x', x_0) = d(x, x') + f(x').$$

Durch Vertauschen von x und x' folgt $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$ wie gewünscht.

Die folgende Umformulierung der Stetigkeit erfreut sich zum Teil großer Beliebtheit.

Satz 1.4 (Charakterisierung stetiger Abbildungen) *Seien X, Y metrische Räume und $\Omega \subset X$ sei offen. Eine Abbildung $f : \Omega \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist.*

Beweis: Sei f stetig, $V \subset Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(V)$. Dann ist $y_0 = f(x_0) \in V$, also gilt $B_\varepsilon(y_0) \subset V$ für geeignetes $\varepsilon > 0$. Es gibt dann ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x_0) \cap \Omega) \subset B_\varepsilon(y_0)$. Wir können außerdem $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ annehmen, und dann folgt $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$ wie verlangt.

Umgekehrt sei $y_0 = f(x_0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Voraussetzung ist dann $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ offen, das heißt es gibt ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ beziehungsweise $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0)$. $\square$

Im Gegensatz zur Definition 1.10 der Stetigkeit, die in jedem einzelnen Punkt des Definitionsbereichs überprüft werden kann, bezieht sich die hier gegebene Eigenschaft auf die Funktion als Ganzes, sie ist nicht lokal.

Aus der Analysis 1 wissen wir, dass noch eine dritte topologische Eigenschaft von Mengen von großer Bedeutung ist.

Definition 1.12 (Folgenkompaktheit) *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums X heißt (folgen-)kompakt, wenn gilt: jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in M$ hat eine Teilfolge $(x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in M$ konvergiert.*

Wir werden eine alternative Charakterisierung der Kompaktheit mittels Überdeckungen bei Gelegenheit kennenlernen. Zunächst beziehen wir uns aber stets auf Definition 1.12. Um die Kompaktheit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ festzustellen, ist das folgende Kriterium sehr nützlich, das in Kapitel 4, Satz 2.2, gezeigt wurde.

Satz 1.5 (Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$) *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Diese Aussage ist in vielen metrischen Räumen falsch, das heißt es kann abgeschlossene und beschränkte Mengen geben, die nicht kompakt sind. Folgende Aussagen über Stetigkeit und kompakte Mengen sind oft nützlich.

Satz 1.6 (Bilder kompakter Mengen) *Seien X, Y metrische Räume, D eine Teilmenge von X und $f : D \to Y$ stetig. Ist $K \subset D$ kompakt, so gilt*

(1) *$f(K)$ ist kompakte Teilmenge von Y.*

(2) *Ist f injektiv, so ist $f^{-1} : f(K) \to X$ stetig.*

Beweis: Sei (y_k) eine Folge in $M = f(K)$, also $y_k = f(x_k)$ für $x_k \in K$. Da K kompakt, gibt es eine Teilfolge mit $x_{k_j} \to x \in K$. Aus der Stetigkeit von f folgt $y_{k_j} = f(x_{k_j}) \to f(x) \in M$.

Jetzt nehmen wir indirekt an, f^{-1} sei in $y = f(x)$ unstetig. Dann gibt es eine Folge $y_k = f(x_k)$ mit $y_k \to y$, aber $d_X(x_k, x) \geq \varepsilon$ für alle k. Da K kompakt, gibt es eine Teilfolge $x_{k_j} \to x' \in K$ und es gilt $d(x', x) \geq \varepsilon$. Aber f ist stetig in x', also $f(x') = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = y$, im Widerspruch zur Injektivität von f. $\square$

Satz 1.7 (Extrema) *Eine stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge $K \neq \emptyset$ eines metrischen Raums X ist beschränkt und nimmt ihr Infimum und Supremum an.*

Beweis: vgl. Kapitel 4, Satz 2.1 $\square$

Beispiel 1.5 Sei $K \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ einen nächsten Punkt $x \in K$, das heißt

$$d(x, x_0) = \inf_{y\in K} d(y, x_0) = \operatorname{dist}(x_0, K).$$

Der Punkt x ist nicht notwendig eindeutig, betrachte etwa $K = \{1, -1\} \subset \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$.

Satz 1.8 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Sei K kompakte Teilmenge eines metrischen Raums X. Dann ist jede stetige Abbildung $f : K \to Y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis: vgl. Kapitel 5, Satz 1.4. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $x_n, x'_n \in K$ mit $d(x_n, x'_n) \to 0$, aber $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Da K kompakt, konvergiert die Folge x_n nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gegen ein $x \in K$. Wegen $d(x'_n, x) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, x)$ konvergiert dann auch die Folge x'_n gegen x, und es gilt aufgrund der Stetigkeit

$$\varepsilon \leq d(f(x_n), f(x'_n)) \leq d(f(x_n), f(x)) + d(f(x), f(x'_n)) \to 0,$$

ein Widerspruch. □

2 Partielle Ableitungen

Wir kommen nun zur Differentiation von Funktionen im $\mathbb{R}^n$. Um für diese Ableitungen zu definieren, ist die einfachste und vielfach beste Idee, alle Variablen bis auf x_j als konstant aufzufassen und die resultierende Funktion der einen Variablen x_j wie üblich zu differenzieren. Auf diese Weise ergeben sich für $j = 1, \ldots, n$ die n partiellen Ableitungen der Funktion. Im Folgenden bezeichnet $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, also $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit der 1 an der j-ten Stelle.

Definition 2.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $x \in \Omega$ ist der Grenzwert (falls existent)*

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}.$$

Andere Bezeichnungen sind $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ und $D_j f(x)$.

Die partielle Ableitung $\partial_j f(x)$ ist einfach die Ableitung der reellen Funktion $(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^m$, $t \mapsto f(x + te_j)$, an der Stelle $t = 0$, oder alternativ die Ableitung der reellen Funktion

$$(x_j - \delta, x_j + \delta) \to \mathbb{R}^m, \quad y \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

an der Stelle $y = x_j$. Der folgende Satz formuliert in diesem Zusammenhang wohlbekannte Ergebnisse der eindimensionalen Analysis.

Satz 2.1 (Ableitungsregeln) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$. Die Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ und $\partial_j g(x)$ sei vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Linearität: *für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\partial_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha\, \partial_j f(x) + \beta\, \partial_j g(x).$$

(b) Komponentenweise Differentiation: *für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ gilt, wenn eine der Seiten existiert,*

$$\partial_j f(x) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x)\, e_i.$$

(c) Produktregel: *für* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *gilt*

$$\partial_j(fg)(x) = (\partial_j f)(x)g(x) + f(x)(\partial_j g)(x).$$

(d) Quotientenregel: *für* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $g(x) \neq 0$ *gilt*

$$\partial_j \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(\partial_j f)(x)g(x) - f(x)(\partial_j g)(x)}{g(x)^2}.$$

(e) Kettenregel: *ist* $f : \Omega \to I \subset \mathbb{R}$ *und* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $f(x)$*, so folgt*

$$\partial_j(\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x))\partial_j f(x).$$

Beispiel 2.1 Wir betrachten die Euklidische Abstandsfunktionen vom Nullpunkt

$$r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ r(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

In $x \neq 0$ existieren die partiellen Ableitungen, und zwar gilt mit der Kettenregel

$$\partial_j r(x) = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_j}{r} \qquad \text{für } r = r(x) = |x|.$$

Im Nullpunkt sind die partiellen Ableitungen dagegen nicht definiert, denn $r(0+te_i) = |t|$ ist in $t = 0$ nicht differenzierbar. Die Funktion $\partial_j r$ ist in $x \neq 0$ ihrerseits partiell differenzierbar, und wir erhalten die zweiten partiellen Ableitungen

$$\partial_i(\partial_j r)(x) = \frac{(\partial_i x_j)r - x_j \partial_i r}{r^2} = \frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right).$$

Ist $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, so berechnen wir weiter für $f = \varphi \circ r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_j f(x) &= \varphi'(r)\partial_j r = \varphi'(r)\frac{x_j}{r}, \\ \partial_i(\partial_j f)(x) &= \varphi''(r)\partial_i r \partial_j r + \varphi'(r)\partial_i(\partial_j r) = \varphi''(r)\frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Der Operator $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$ heißt Laplaceoperator, die Lösungen der Gleichung $\Delta f = 0$ heißen harmonische Funktionen. Wir können jetzt die rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen ausrechnen, und zwar erhalten wir

$$0 \stackrel{!}{=} \Delta f(x) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}\big(r^{n-1}\varphi'(r)\big)'.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen, mit Integrationskonstanten $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(r) = \begin{cases} a\,\dfrac{r^{2-n}}{2-n} + b & \text{für } n \geq 3 \\ a\,\log r + b & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Für $n = 3$ ist f das Newtonsche Gravitationspotential.

Im vorangegangenen Beispiel traten zweite partielle Ableitungen auf. Ist für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Ableitungsfunktion $\partial_j f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert und ihrerseits in $x \in \Omega$ nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir

$$\partial_i \partial_j f(x) := \partial_i(\partial_j f)(x) \qquad \text{(alternative Notation } D^2_{ij} f(x) \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)). \tag{2.1}$$

Entsprechend für Ableitungen beliebiger Ordnung: ist für $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ die Ableitungsfunktion $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definiert und in $x \in \Omega$ nach x_i partiell differenzierbar, so setzen wir induktiv

$$\partial_i \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(x) = \partial_i(\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x). \tag{2.2}$$

Die folgenden Klassen von Funktionen spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Wir werden sehen, dass die Eigenschaft der Stetigkeit der partiellen Ableitungen in vielen Anwendungen wesentlich ist.

Definition 2.2 (C^k-Räume) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wir bezeichnen mit $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit Werten im $\mathbb{R}^m$, das heißt alle partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_j} f$ der Ordnung $j \leq k$ (bzw. $j < \infty$ im Fall $k = \infty$) sind definiert und stetig auf Ω. Im reellwertigen Fall, also $m = 1$, setzen wir $C^k(\Omega, \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$.*

Wir wollen nun zeigen, dass die Operatoren ∂_i und ∂_j auf C^2-Funktionen vertauschen. Aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ allein folgt das nicht, wie das Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{2.3}$$

zeigt. Für diese Funktion ist $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 1$, aber $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$.

Satz 2.2 (Symmetrie der 2. Ableitung, H. A. Schwarz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^2(\Omega)$, so vertauschen für $1 \leq i, j \leq n$ die Ableitungen nach x_i und x_j:*

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \qquad \textit{auf } \Omega.$$

Beweis: Nach Definition ist $\partial_j f(x)$ Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\Delta^t_j f(x) = \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \qquad \text{für } t \to 0.$$

Für $\Delta^s_i(\Delta^t_j f)(x) = \frac{1}{s}\Big(\Delta^t_j f(x + se_i) - \Delta^t_j f(x)\Big)$ folgt

$$\lim_{s \to 0} \Big(\lim_{t \to 0} \Delta^s_i(\Delta^t_j f)(x) \Big) = \partial_i(\partial_j f)(x).$$

Das Problem besteht darin, die beiden Grenzwerte zu vertauschen. Der Differenzenquotient vertauscht immerhin mit der partiellen Ableitung:

$$\partial_i(\Delta^t_j f)(x) = \frac{1}{t}\big(\partial_i f(x + te_j) - \partial_i f(x)\big) = \Delta^t_j(\partial_i f)(x).$$

Wir verwenden nun den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Ist g nach x_i partiell differenzierbar, so gilt für ein $\alpha \in [0,1]$:

$$\Delta_i^s g(x) = \frac{g(x+se_i) - g(x)}{s} = \partial_i g(x + \alpha s e_i).$$

Wir wenden das an auf $g = \Delta_j^t f$ und auf $g = \partial_i f$, wobei $\alpha, \beta \in [0,1]$ von s, t abhängen:

$$\Delta_i^s(\Delta_j^t f)(x) = \partial_i(\Delta_j^t f)(x + \alpha s e_i) = \Delta_j^t(\partial_i f)(x + \alpha s e_i) = \partial_j(\partial_i f)(x + \alpha s e_i + \beta t e_j).$$

Da nach Voraussetzung $\partial_j \partial_i f$ stetig in x ist, folgt die Behauptung, indem wir erst $t \to 0$ und dann $s \to 0$ gehen lassen. $\square$

Bemerkung. Tatsächlich haben wir gezeigt: existieren $\partial_i f$, $\partial_j f$, $\partial_j \partial_i f$ und ist $\partial_j \partial_i f$ stetig in x, so existiert auch $\partial_i \partial_j f(x)$ und es gilt $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$.

Folgerung 2.1 *Für eine Funktion $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vertauschen die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k, das heißt für jede Permutation $\sigma \in S_k$ gilt*

$$\partial_{i_{\sigma(1)}} \ldots \partial_{i_{\sigma(k)}} f = \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f.$$

BEWEIS: Nach Satz 2.2 können benachbarte Operatoren ∂_i, ∂_j vertauscht werden. Die symmetrische Gruppe wird durch Vertauschungen erzeugt (siehe Lineare Algebra). $\square$

Der Begriff der partiellen Ableitung allein ist nicht geeignet, um die mehrdimensionale Differentialrechnung zu entwickeln. Ein entscheidender Mangel ist, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ in $x \in \Omega$ nicht die Stetigkeit von f im Punkt x folgt.

Beispiel 2.2 Sei $\Omega = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann gilt $f(x,0) = 0 = f(0,y)$, insbesondere $\partial_1 f(0,0) = 0 = \partial_2 f(0,0)$. Aber für $c(t) = (t,t)$ gilt $f(c(t)) = 1/2$ für alle $t \neq 0$, das heißt f ist nicht stetig im Nullpunkt.

Insbesondere können wir im allgemeinen keine Kettenregel für $f \circ c$ formulieren, da die Funktion $f \circ c$ nicht einmal stetig sein muss. Die Definition der partiellen Ableitungen macht explizit von den Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ Gebrauch. Es wäre denkbar, dass sich ein besserer Ableitungsbegriff ergibt, wenn alle Richtungen gleichberechtigt betrachtet werden. Dies führt auf den Begriff der Richtungsableitung.

Definition 2.3 (Richtungsableitung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Für $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$ heißt der Grenzwert (falls existent)*

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v. Dies ist die gewöhnliche Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x+tv)$ an der Stelle $t = 0$.

Beispiel 2.3 Die Richtungsableitung von $r(x) = |x|$ in $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\partial_v r(x) = \frac{d}{dt} \sqrt{|x|^2 + 2t\langle x, v\rangle + |v|^2}\ |_{t=0} = \left\langle \frac{x}{|x|}, v \right\rangle.$$

Leider reicht aber selbst die Existenz aller Richtungsableitungen von f in $x \in \Omega$ nicht aus, damit f auch stetig im Punkt x ist.

Beispiel 2.4 Betrachte jetzt auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann existieren im Punkt (0,0) alle Richtungsableitungen, denn für $v = (a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\partial_v f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{2ab^2}{a^2 + t^2 b^4} = \begin{cases} 2b^2/a & \text{für } a \neq 0 \\ 0 & \text{für } a = 0. \end{cases}$$

Dennoch ist f im Nullpunkt unstetig, denn für $c(t) = (t^2, t)$ gilt $f(c(t)) = 1$ für alle $t \neq 0$.

3 Die Ableitung

In Analysis 1 hatten wir gesehen, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x_0 gleichbedeutend mit der Existenz einer affinlinearen Funktion ist, die in x_0 mit f in erster Ordnung übereinstimmt. Dieser Ableitungsbegriff hat sich für Funktionen mehrerer Variabler als der richtige durchgesetzt.

Definition 3.1 (Ableitung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Die lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ heißt Ableitung von f im Punkt x_0, falls gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + A(x - x_0)\big)}{|x - x_0|} = 0. \tag{3.1}$$

f heißt dann differenzierbar in x_0 mit Ableitung $Df(x_0) = A$.

Mit der Substitution $h = x - x_0$ erhalten wir die äquivalente Fassung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - \big(f(x_0) + A\,h\big)}{|h|} = 0. \tag{3.2}$$

Satz 3.1 (Berechnung der Ableitung) *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann besitzt f in x_0 die Richtungsableitungen*

$$\partial_v f(x_0) = Df(x_0)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

und $Df(x_0)$ hat bezüglich der Standardbasen die Matrixdarstellung (Jacobimatrix)

$$(\partial_j f_i(x_0)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \tag{3.4}$$

Insbesondere ist die Ableitung durch (3.1) eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Für $v = 0$ sind beide Seiten von (3.3) nach Definition gleich Null. Für $v \neq 0$ setzen wir $Df(x_0) = A$, und erhalten für $t \to 0$ aus (3.1)

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Av\right| &= \frac{\big|f(x_0+tv)-\big(f(x_0)+A(tv)\big)\big|}{|t|}\\ &= \frac{\big|f(x_0+tv)-\big(f(x_0)+A(tv)\big)\big|}{|tv|}\,|v| \to 0.\end{aligned}$$

Setzen wir $v = e_j$ und berechnen die partielle Ableitung komponentenweise, siehe Satz 2.1, so ergibt sich

$$Df(x_0)e_j = \partial_j f(x_0) = \sum_{i=1}^m \partial_j f_i(x_0) e_i.$$

□

Im allgemeinen ist der Nachweis der Differenzierbarkeit direkt anhand der Definition 3.1 nicht so einfach. Hier ein paar Beispiele.

Beispiel 3.1 Für eine symmetrische Bilinearform $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachten wir die zugehörige quadratische Form $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = b(x,x)$. Wir behaupten, dass f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ Df(x_0)v = 2\,b(v,x_0) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Die rechte Seite definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Wir berechnen

$$f(x_0+h) = b(x_0+h, x_0+h) = f(x_0) + 2\,b(h,x_0) + b(h,h).$$

Nun gilt die Abschätzung

$$|b(h,h)| \leq \sum_{i,j=1}^n |b(e_i,e_j)|\,|h_i|\,|h_j| \leq C|h|^2 \quad \text{mit } C = \sum_{i,j=1}^n |b(e_i,e_j)|,$$

und es folgt

$$\frac{f(x_0+h)-\big(f(x_0)+2b(h,x_0)\big)}{|h|} = \frac{b(h,h)}{|h|} \to 0 \quad \text{mit } h \to 0,$$

was zu zeigen war.

Beispiel 3.2 Die Funktion $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}^m$ habe in $x_0 \in I$ die Ableitung $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$ im Sinne von Analysis 1. Dann ist f differenzierbar in x_0 im Sinne von Definition 3.1 mit

$$Df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad Df(x_0)h = f'(x_0)h.$$

Denn es gilt für $h \neq 0$

$$\frac{\big|f(x_0+h)-\big(f(x_0)+f'(x_0)h\big)\big|}{|h|} = \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

Beispiel 3.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dann ist die Einschränkung

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

in allen $x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung $Df(x_0) = A$. Dies folgt sofort wegen $f(x_0+h) = A(x_0 + h) = Ax_0 + Ah = f(x_0) + Ah$.

Definition 3.2 (Gradient) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \Omega$. Der Gradient von f im Punkt x ist der Vektor*

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Der Gradient ist der eindeutig bestimmte Vektor mit der Eigenschaft

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = Df(x)v \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Ist $\operatorname{grad} f(x) = 0$, so heißt x kritischer Punkt von f. Ist x nicht kritisch, so ist die Richtung von $\operatorname{grad} f(x)$ diejenige, in der f am stärksten ansteigt. Denn für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle \leq |\operatorname{grad} f(x)|,\ \text{Gleichheit genau wenn } v = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|}. \tag{3.6}$$

Beispiel 3.4 Der Gradient der Funktion $f(x) = \varphi(r)$ mit $r(x) = |x|$ ist nach Beispiel 2.1

$$\operatorname{grad} f(x) = \varphi'(r)\frac{x}{r} \quad \text{für } x \neq 0.$$

Beispiel 3.5 Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, und $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ der zugehörige Endomorphismus bzgl. des Standardskalarprodukts, genauer

$$b(x, y) = \langle x, By\rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Bezüglich der Standardbasis gilt $B_{ij} = b(e_i, e_j)$. Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = b(x, x)$, folgt

$$\operatorname{grad} f(x) = 2Bx \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Denn nach Beispiel 3.1 gilt für alle $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \operatorname{grad} f(x), v\rangle = Df(x)v = 2b(v, x) = 2\langle v, Bx\rangle.$$

Man kann sich eine reellwertige Funktion f auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets als Höhenfunktion einer Landschaft über der Grundfläche Ω vorstellen. Dazu betrachtet man ihren Graph

$$G = \{(y, f(y)) : y \in \Omega\} \subset \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aus der Differenzierbarkeit von f im Punkt x folgt, dass der Graph im Punkt $p = (x, f(x))$ eine Tangentialebene besitzt. Um dies zu sehen, betrachten wir für $\lambda > 0$ die Mengen $G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p)$, das heißt G wird um $-p$ verschoben – dabei landet p im Nullpunkt – und dann mit dem Faktor $\frac{1}{\lambda}$ gestreckt. Wir erwarten, dass die $G_{p,\lambda}$ für $\lambda \to 0$ gegen die

Tangentialhyperebene konvergieren. Da G Graph über Ω ist, ist $G_{p,\lambda}$ Graph über der Menge $\Omega_{x,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\Omega - x)$, und zwar gilt

$$G_{p,\lambda} = \Big\{ \Big(\frac{y-x}{\lambda}, \frac{f(y)-f(x)}{\lambda} \Big) : y \in \Omega \Big\} = \Big\{ \Big(z, \frac{f(x+\lambda z) - f(x)}{\lambda} \Big) : z \in \Omega_{x,\lambda} \Big\}.$$

Für $z \in \mathbb{R}^n$ ist $x + \lambda z \in \Omega$ und folglich $z \in \Omega_{x,\lambda}$ für $\lambda > 0$ hinreichend klein. Aus (3.3) folgt nun für die Graphenfunktionen der $G_{p,\lambda}$

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x+\lambda z) - f(x)}{\lambda} = Df(x)z.$$

Es ist damit gerechtfertigt, die Menge $T_pG = \{(z, Df(x)z) : z \in \mathbb{R}^n\}$ als Tangentialraum des Graphen im Punkt $(x, f(x))$ zu definieren. Als Bild der linearen Abbildung $z \mapsto (z, Df(x)z)$ ist T_pG ein linearer Unterraum mit der Basis $(e_1, \partial_1 f(x)), \ldots, (e_n, \partial_n f(x))$. Es ist leicht zu sehen, dass der Vektor

$$\nu = \frac{(-\mathrm{grad}\, f(x), 1)}{\sqrt{1 + |\mathrm{grad}\, f(x)|^2}}$$

senkrecht auf den Tangentialraum steht und Länge Eins hat.

Im Beweis der Differentiationsregeln brauchen wir folgende Abschätzung für lineare Abbildungen $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, vgl. Beispiel 1.13 in Kapitel 3:

$$|A(x)| \leq |A|\,|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Zum Beweis verwenden wir die Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen

$$A(x) = \sum_{j=1}^n x_j A(e_j) \quad \text{mit } A(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i.$$

Aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^m$ und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt

$$|A(x)|^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\,|A(e_j)| \Big)^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^n |A(e_j)|^2 \Big) = |A|^2\,|x|^2.$$

Hier wurde $\sum_{j=1}^n |A(e_j)|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}^2 = |A|^2$ benutzt. Als Folgerung ergibt sich, dass jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig ist, genauer

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \leq |A|\,|x-y|.$$

Wir bemerken, dass in Abschätzung (3.7) die Euklidische Norm $|A|$ durch die im allgemeinen kleinere Operatornorm $\|A\| = \sup_{|x|=1} |A(x)|$ ersetzt werden kann; das ist offenbar die optimale Konstante in (3.7). Da die Operatornorm schwieriger auszurechnen ist, arbeiten wir jedoch in der Regel mit der Euklidischen Norm.

Die Abschätzung (3.7) ist im allgemeinen nicht gültig, wenn $\mathbb{R}^n$ durch einen unendlichdimenionalen normierten Raum ersetzt wird, und lineare Abbildungen sind dann nicht automatisch stetig.

Satz 3.2 (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.*

Beweis: Wie soeben besprochen, sind affinlineare Funktionen stetig auf $\mathbb{R}^n$. Es reicht daher zu zeigen, dass die Funktion $\varphi(x) = f(x) - \big(f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)\big)$ stetig in x_0 ist. Aber $\varphi(x_0) = 0$, und nach Definition der Differenzierbarkeit gilt

$$\varphi(x) = |x - x_0| \, \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \to 0 \quad \text{mit } x \to x_0.$$

$\square$

Wir müssen jetzt die Differentiationsregeln erarbeiten.

Satz 3.3 (Kettenregel) *Seien $f : U \to \mathbb{R}^m$ und $g : V \to \mathbb{R}^p$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big)Df(x_0).$$

Für die zugehörigen Jacobimatrizen bedeutet das mit $y_0 = f(x_0)$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y_0)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \qquad \text{für } 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq k \leq n.$$

Beweis: Sei $y_0 = f(x_0)$, $Df(x_0) = A$, $Dg(y_0) = B$. Wir definieren für hinreichend kleine $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\eta \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ die Funktionen

$$\varepsilon_f(\xi) = \frac{f(x_0 + \xi) - \big(f(x_0) + A\xi\big)}{|\xi|} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_g(\eta) = \frac{g(y_0 + \eta) - \big(g(y_0) + B\eta\big)}{|\eta|}.$$

Mit $\varepsilon_f(0) = 0$ und $\varepsilon_g(0) = 0$ sind beide Funktionen nach Voraussetzung im Nullpunkt stetig. Offensichtliche Kandidatin für die Ableitung von $g \circ f$ in x_0 ist BA, also berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{(g \circ f)(x_0 + \xi) - \big((g \circ f)(x_0) + BA\xi\big)}{|\xi|} \\
= \ & \frac{g\big(y_0 + A\xi + |\xi|, \varepsilon_f(\xi)\big) - \big(g(y_0) + BA\xi\big)}{|\xi|} \\
= \ & \frac{g(y_0) + B\eta + |\eta| \, \varepsilon_g(\eta) - \big(g(y_0) + BA\xi\big)}{|\xi|} \qquad \text{wobei } \eta = A\xi + |\xi| \, \varepsilon_f(\xi) \\
= \ & B\varepsilon_f(\xi) + \frac{|\eta|}{|\xi|} \, \varepsilon_g(\eta).
\end{aligned}$$

Wegen $|B\varepsilon_f(\xi)| \leq |B||\varepsilon_f(\xi)|$ und $|\eta| \leq (|A| + |\varepsilon_f(\xi)|)|\xi| \leq C|\xi|$ konvergiert die rechte Seite wie gewünscht gegen Null. $\square$

Beispiel 3.6 Spezialfall ist die Verkettung $f \circ c$ einer Kurve $c : (a, b) \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ist c differenzierbar in $t \in (a, b)$ und f differenzierbar in $c(t)$, so folgt

$$\frac{d(f \circ c)}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t))\frac{dc_j}{dt}(t),$$

beziehungsweise in vektorieller Form

$$(f \circ c)'(t) = Df(x)c'(t) = \langle \operatorname{grad} f(x), c'(t) \rangle \qquad \text{wobei } x = c(t).$$

Ist $f \circ c$ konstant, so folgt $\operatorname{grad} f(x) \perp c'(t)$. Anschaulich bedeutet das, der Gradient von f steht senkrecht auf die Niveaumengen $\{x \in \Omega : f(x) = \text{const.}\}$. Im zweidimensionalen Fall kann man sich die Niveaumengen als Höhenlinien vorstellen.

Weitere Regeln für den Umgang mit der Ableitung sind die folgenden.

Satz 3.4 (Ableitungsregeln) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$. Die Existenz der Ableitungen $Df(x)$ und $Dg(x)$ sei jeweils vorausgesetzt. Dann gelten folgende Aussagen:*

(a) Linearität: *für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt*

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

(b) Produktregel: *für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt*

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x).$$

(c) Quotientenregel: *für $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ gilt*

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis: Wir setzen $Df(x) = A$, $Dg(x) = B$ sowie für $h \neq 0$

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x+h) - \big(f(x) + Ah\big)}{|h|} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_g(h) = \frac{g(x+h) - \big(g(x) + Bh\big)}{|h|}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\varepsilon_f(h) \to 0$, $\varepsilon_g(h) \to 0$ mit $h \to 0$. Mit der jeweils behaupteten Ableitung ist nun für $h \to 0$ der Grenzwert in (3.2) nachzuprüfen. Für (a) gilt

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - \big((\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha A + \beta B)h\big)}{|h|} = \alpha \varepsilon_f(h) + \beta \varepsilon_g(h) \to 0.$$

Für (b) berechnen wir mit etwas mehr Mühe

$$\begin{aligned}
& \frac{(fg)(x+h) - \big((fg)(x) + (Ag(x) + f(x)B)\,h\big)}{|h|} \\
= \; & \frac{\big(f(x) + Ah + \varepsilon_f(h)|h|\big)\big(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|\big) - \big(f(x)g(x) + g(x)Ah + f(x)Bh\big)}{|h|} \\
= \; & \frac{1}{|h|}(Ah)(Bh) + \varepsilon_f(h)\,(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|) + \varepsilon_g(|h|)(f(x) + Ah).
\end{aligned}$$

Wie in (3.7) bemerkt gilt $|Ah| \leq |A||h|$ sowie $|Bh| \leq |B||h|$, also geht die rechte Seite mit $h \to 0$ gegen Null. In (c) können wir $m = 1$ und $f \equiv 1$ annehmen, denn sonst schreiben wir

$f/g = f(1/g)$ und verwenden (b). Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|h|}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \Big(\frac{1}{g(x)} - \frac{Bh}{g(x)^2}\Big)\right)\\
= \;& \frac{1}{|h|}\,\frac{1}{g(x)g(x+h)}\Big(g(x) - \big(g(x) + Bh + \varepsilon_g(h)|h|\big) + \frac{g(x+h)}{g(x)}Bh\Big)\\
= \;& \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\Big(\frac{g(x+h)}{g(x)} - 1\Big)\frac{Bh}{|h|} - \varepsilon_g(h)\right).
\end{aligned}$$

Wegen $g(x) \neq 0$ und $g(x+h) \to g(x)$ mit $h \to 0$ nach Satz 3.2 geht die rechte Seite wieder gegen Null mit $h \to 0$. □

Die koordinatenfreie Notation ermöglicht oft ein gutes geometrisches Verständnis für die Ableitung als lineare Abbildung. Allerdings ist beim Umgang mit Zeilen- und Spaltenvektoren Vorsicht geboten, zum Beispiel kann bei der Produktregel Verwirrung entstehen, wenn eine der beteiligten Funktionen vektorwertig sind. Erst recht wird die Notation kompliziert, wenn zweite oder höhere Ableitungen zu bilden sind. Im Zweifelsfall sollte man auf die partiellen Ableitungen zurückgreifen.

Satz 3.5 (komponentenweise Differentiation) *$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, wenn alle Komponenten $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, in x_0 differenzierbar sind. Ist $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Projektion auf die i-te Koordinate, so gilt $Df_i(x_0) = P_i\, Df(x_0)$.*

Beweis: Es gilt nach Definition

$$Df(x_0) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + A(x - x_0)\big)}{|x - x_0|} = 0.$$

Die Konvergenz im $\mathbb{R}^n$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz aller Komponenten. Durch Anwendung von P_i ergibt sich daher weiter die äquivalente Formulierung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_i(x) - \big(f_i(x_0) + P_i A(x - x_0)\big)}{|x - x_0|} = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m. \tag{3.8}$$

Aus $Df(x_0) = A$ folgt somit $Df_i(x_0) = P_i A$. Ist umgekehrt $Df_i(x_0) = A_i$ für $i = 1, \ldots, m$, so definieren wir $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch $A(x) = \sum_{i=1}^m A_i(x) e_i$. Dann ist $P_i A = A_i$, also gilt (3.8) und somit $Df(x_0) = A$. □

Wie besprochen kann aus der Existenz der partiellen Ableitungen nicht auf die Differenzierbarkeit geschlossen werden, ja nicht einmal auf die Stetigkeit. Das ist schade, denn die partiellen Ableitungen sind so schön einfach auszurechnen, während der Nachweis der Differenzierbarkeit anhand der Definition 3.1 etwas Aufwand erfordert. Der folgende Satz liefert ein zentrales, hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit einer Funktion.

Satz 3.6 (stetig partiell differenzierbar ⇒ differenzierbar) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sei in allen $x \in \Omega$ nach $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar. Sind die Ableitungen $\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in \Omega$ stetig, so ist f in x_0 differenzierbar.*

Beweis: Wegen Satz 3.5 können wir $m = 1$ annehmen. Mit Satz 3.1 kennen wir bereits die einzig mögliche Kandidatin für die Ableitung, und zwar

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Ah = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x_0) h_k.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset \Omega$, so dass

$$|\partial_k f(x) - \partial_k f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(x_0).$$

Für $|h| < \delta$ betrachten wir die Punkte $x_k = x_0 + \sum_{i=1}^k h_i e_i$ mit $1 \leq k \leq n$, und erhalten aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + h_k e_k) - f(x_{k-1}) = \partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k$$

für geeignete $s_k \in [0,1]$. Es folgt, da $|x_{k-1} + s_k h_k e_k - x_0| \leq |h| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\frac{\big|f(x_0+h) - \big(f(x_0) + Ah\big)\big|}{|h|} &= \frac{1}{|h|}\Big|\sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - f(x_{k-1}) - \partial_k f(x_0) h_k\big)\Big| \\
&= \frac{1}{|h|}\Big|\sum_{k=1}^n \Big(\partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0)\Big) h_k\Big| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \Big|\partial_k f(x_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x_0)\Big| < n\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Für das Rechnen mit C^k-Funktionen gelten die folgenden Regeln. Besonders angenehm ist der Raum $C^\infty(\Omega)$, der sogar unter Differentiation abgeschlossen ist.

Folgerung 3.1 *Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

(a) *Mit $f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt $\alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

(b) *Aus $f, g \in C^k(\Omega)$ folgt $fg \in C^k(\Omega)$, sowie $f/g \in C^k(\Omega)$ falls $g \neq 0$ auf Ω.*

(c) *Sind $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^k(V, \mathbb{R}^p)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f(U) \subset V$, so ist $g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$.*

Beweis: Im Fall $k = 0$ sind die Aussagen wohlbekannt. Die Behauptungen (a) und (b) folgen nun aus den Rechenregeln für die partielle Ableitung, siehe Satz 2.1, mit Induktion über k. Sind zum Beispiel $f, g \in C^k(\Omega)$ für ein $k \geq 1$, so gilt induktiv $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in C^{k-1}(\Omega)$, also $fg \in C^k(\Omega)$.

Für $k \geq 1$ sind die Abbildungen f und g aus (c) differenzierbar nach Satz 3.6. Dann ist $g \circ f$ ebenfalls differenzierbar wegen der Kettenregel, Satz 3.3, mit partiellen Ableitungen $\partial_k (g \circ f)_i = \sum_{j=1}^m (\partial_j g_i) \circ f \, \partial_k f_j$. Nun ist $(\partial_j g_i) \circ f \in C^{k-1}(U)$ nach Induktionsannahme sowie $\partial_k f_j \in C^{k-1}(U)$ nach Voraussetzung, also ist $\partial_k (g \circ f)_i \in C^{k-1}(U)$ mit der Produktregel aus (b) und folglich $g \circ f$ von der Klasse C^k. □

Kapitel 7

Anwendungen der Differentialrechnung

1 Schrankensatz

Ein Grundproblem in der Analysis ist es, Informationen über die Ableitung in Eigenschaften der Funktion zu übersetzen. Für Funktionen einer Variablen, also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, stehen uns dazu zwei Argumente zur Verfügung:

a) der Mittelwertsatz (siehe Kapitel 4.2):

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) \quad \text{für ein } \tau \in (a, b);$$

b) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe Kapitel 5.2):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Im Vergleich ist der Mittelwertsatz insofern stärker, als er mit minimalen Voraussetzungen auskommt – f muss differenzierbar in (a, b) und stetig in den Endpunkten a,b sein. Dagegen verlangt unsere Version des Hauptsatzes, dass f stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist. Tasächlich reicht es, wenn f stetig auf $[a, b]$ und stückweise C^1 ist, das heißt es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, so dass $f\, |_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig differenzierbar ist für $k = 1, \ldots, N$. Wir können dann nämlich den Hauptsatz auf jedem Teilintervall anwenden und erhalten

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{N} \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f'(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, dt,$$

wobei f' in jedem der Punkte t_k einen links- und rechtsseitigen Grenzwert hat, die nicht notwendig gleich sind. Ein Nachteil des Mittelwertsatzes ist, dass er für vektorwertige Funktionen in der Regel nicht gilt, zum Beispiel ist für $f(t) = e^{it}$

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \quad \text{aber} \quad f'(\tau) = ie^{i\tau} \neq 0 \text{ für alle } \tau \in (0, 2\pi).$$

Der Mittelwertsatz kann natürlich auf jede Komponente einzeln angewandt werden, aber die Zwischenstellen werden in der Regel verschieden sein, und dass ist unpraktisch. Im Folgenden arbeiten wir deshalb mit dem Hauptsatz, und nehmen die stärkere Voraussetzung C^1 oder stückweise C^1 in Kauf. Es stellt sich heraus, dass die C^1-Bedingung für die Anwendungen richtig ist.

Wie können diese eindimensionalen Werkzeuge nun für Funktionen mehrerer Variabler $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eingesetzt werden? Die einfache Antwort heißt: indem f längs Kurven $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $\gamma = \gamma(t)$, ausgewertet wird.

Lemma 1.1 *Sei $\gamma : I = [a,b] \to \Omega$ stetig und stückweise C^1. Dann gilt für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$*

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b Df\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Beweis: Nach Folgerung 3.1 ist die Funktion $f \circ \gamma$ stückweise C^1, und es folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\,dt = \int_a^b Df\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt.$$

□

Im Beweis trat das Integral einer vektorwertigen Funktion auf. Dieses kann komponentenweise erklärt werden, das heißt für $v \in C^0([a,b], \mathbb{R}^m)$ ist

$$\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^m v_i(t)e_i\Big)\,dt = \sum_{i=1}^m \Big(\int_a^b v_i(t)\,dt\Big)e_i.$$

Alternativ kann man nachprüfen, dass die in Kapitel 5 gegebene Definition des Integrals mittels Riemannscher Summen ohne Änderungen auch für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ funktioniert. Man kann sich so oder so davon überzeugen, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ganz analog für vektorwertige Funktionen gilt.

Definition 1.1 *Ein metrischer Raum X heißt wegweise zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten x_0, $x_1 \in X$ eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ gibt mit $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.*

Eine solche Abbildung nennt man auch einen Weg (Englisch: *path*) von x_0 nach x_1.

Lemma 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gibt es einen stetigen, stückweise affinen Weg $\gamma : [0,1] \to \Omega$, d.h. einen Polygonzug, mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.*

Beweis: Sei $c \in C^0([0,1], \Omega)$ mit $c(0) = x_0$ und $c(1) = x_1$ gegeben. Betrachte die Zerlegung $t_k = k/N$ für $k = 0, \ldots, N$ des Intervalls $[0,1]$, und definiere einen Polygonzug $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t_k) = c(t_k)$ für alle k durch

$$\gamma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}\,c(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\,c(t_k) \quad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Wir wollen zeigen, dass dieser Polygonzug für N hinreichend groß ganz in Ω verläuft. Da $c([0,1])$ kompakt ist und $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$ abgeschlossen, gibt es ein $\varrho > 0$ mit

$$|x - c(t)| \geq \varrho \text{ für alle } t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega.$$

Denn sonst gibt es Folgen $x_j \in c([0,1])$, $y_j \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ mit $|x_j - y_j| \to 0$. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt $x_j \to x \in c([0,1])$, und weiter $y_j \to x$, also $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$, ein Widerspruch. Da c gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist, gilt

$$\operatorname{osc}(c,\delta) = \sup\{|c(t)-c(s)| : 0 \leq s,t \leq 1,\, |t-s| \leq \delta\} \to 0 \quad \text{mit } \delta \to 0.$$

Daraus folgt, dass γ gleichmäßig gegen c konvergiert mit $N \to \infty$: für $t \in [0,1]$ wählen wir $k \in \{1,\ldots,N\}$ mit $t \in [t_{k-1},t_k]$ und schätzen wie folgt ab:

$$|\gamma(t)-c(t)| \leq \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}}|c(t_{k-1})-c(t)| + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}|c(t_k)-c(t)| \leq \operatorname{osc}(c,\frac{1}{N}) \to 0 \quad \text{mit } N \to \infty.$$

Für N groß ist also $|\gamma(t) - c(t)| < \varrho$ für alle $t \in [0,1]$, und damit $\gamma([0,1]) \subset \Omega$. □

Satz 1.1 (Konstanzsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gilt:*

$$Df(x) = 0 \quad \textit{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f \textit{ ist konstant.}$$

Beweis: Zu $x_0, x_1 \in \Omega$ gibt es nach Lemma 1.2 einen Polygonzug $\gamma : [0,1] \to \Omega$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Da γ stetig und stückweise C^1, folgt aus Lemma 1.1

$$f(x_1) - f(x_0) = \int_0^1 Df(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = 0.$$

□

Definition 1.2 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls folgende Implikation gilt:*

$$x_0, x_1 \in M \quad \Rightarrow \quad (1-t)x_0 + tx_1 \in M \quad \textit{für alle } t \in [0,1].$$

Satz 1.2 (Schrankensatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Es gebe ein $L < \infty$ mit $|Df(x)| \leq L$ für alle $x \in \Omega$. Dann folgt*

$$|f(x_1) - f(x_0)| \leq L\,|x_1 - x_0| \quad \textit{für alle } x_0, x_1 \in \Omega.$$

Beweis: Für jede stetige Funktion $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}^m$ gilt die Ungleichung

$$\Big|\int_a^b \varphi\Big| \leq \int_a^b |\varphi|. \tag{1.2}$$

Dies folgt durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die Riemannschen Summen. Sei nun $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ für $0 \leq t \leq 1$. Aus (1.1) und (3.7) folgt, da $\gamma'(t) = x_1 - x_0$,

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left|\int_0^1 Df\big(\gamma(t)\big)(x_1 - x_0)\,dt\right| \leq \int_0^1 |Df\big(\gamma(t)\big)(x_1 - x_0)|\,dt \leq L\,|x_1 - x_0|.$$

□

Wir halten noch eine etwas andere Formulierung fest, die später zum Beispiel bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen benutzt wird.

Folgerung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ eine Konstante $L < \infty$ mit*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \textit{für alle } x, y \in K.$$

Beweis: Angenommen nicht, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Punkte $x_k, y_k \in K$ mit

$$|f(x_k) - f(y_k)| > k\,|x_k - y_k| \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots.$$

Da f stetig auf der kompakten Menge K ist, gibt es ein $M < \infty$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in K$, nach Satz 2.1 in Kapitel 4. Weiter können wir nach Wahl einer Teilfolge und Umnummerierung annehmen, dass $x_k \to x \in K$ mit $k \to \infty$. Aber

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k}\,|f(x_k) - f(y_k)| \leq \frac{2M}{k} \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty,$$

also folgt $y_k \to x$ mit $k \to \infty$. Wähle nun ein $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. Da Df stetig ist, gibt es wieder nach Satz 2.1 in Kapitel 4 ein $L < \infty$ mit

$$|Df(y)| \leq L \qquad \text{für alle } y \in \overline{B_r(x)}.$$

Für hinreichend große k gilt $x_k, y_k \in B_r(x)$, also liefert Satz 1.2

$$k|x_k - y_k| < |f(x_k) - f(y_k)| \leq L|x_k - y_k|,$$

ein Widerspruch für k hinreichend groß. □

2 Extremwerte und konvexe Funktionen

In diesem Abschnitt diskutieren wir lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variabler, und verallgemeinern die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien aus Analysis 1. Dabei spielt die zweite Ableitung eine entscheidende Rolle. Wir behandeln im Anschluss Grundtatsachen über konvexe Funktionen. Als bekannt setzen wir voraus: auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ nimmt eine stetige Funktion ihre Extremwerte an.

Definition 2.1 *Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, hat in $x \in M$ ein lokales Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$f(y) \geq f(x) \qquad \textit{für alle } y \in B_\delta(x) \cap M.$$

Ist sogar $f(y) > f(x)$ für $y \in B_\delta(x)\backslash\{x\}$, so heißt das Minimum isoliert. Ein (isoliertes) lokales Maximum ist entsprechend definiert.

Satz 2.1 (notwendige Bedingung für Extrema) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ habe in $x \in \Omega$ ein lokales Extremum. Ist f differenzierbar in x, so folgt $Df(x) = 0$.*

Beweis: Für $v \in \mathbb{R}^n$ hat die Funktion $t \mapsto f(x + tv)$ ein lokales Extremum bei $t = 0$, also folgt aus der eindimensionalen Version und Satz 3.1

$$0 = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = Df(x)v \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

□

Definition 2.2 *Ein Punkt $x \in \Omega$ mit $Df(x) = 0$ heißt kritischer Punkt von f.*

Die kritischen Punkte sind mögliche Kandidaten für Extremstellen, allerdings zeigt schon das Beispiel $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, dass in kritischen Punkten nicht unbedingt ein lokales Extremum vorliegt. Um das genauer zu analysieren, müssen wir die zweite Ableitung heranziehen.

Definition 2.3 *Sei $f \in C^2(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zweite Ableitung von f im Punkt $x \in \Omega$ ist die Bilinearform*

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ D^2 f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) v_i\, w_j.$$

Die zugehörige Matrix $\big(\partial_i \partial_j f(x)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt Hessematrix von f an der Stelle x, und die zugehörige quadratische Form

$$v \mapsto D^2 f(x)(v, v) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) v_i v_j$$

heißt Hesseform von f in x.

Die Hessematrix ist symmetrisch, und $D^2 f(x)$ ist symmetrische Bilinearform. Denn nach Satz 2.2 gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für $f \in C^2(\Omega)$, und daraus folgt

$$D^2 f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) v_i w_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_j \partial_i f(x) w_j v_i = D^2 f(x)(w, v).$$

Als erstes wollen wir dir Formel für die zweite Ableitung längs Kurven herleiten.

Lemma 2.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(\Omega)$ und $\gamma \in C^2(I, \Omega)$. Dann gilt*

$$(f \circ \gamma)''(t) = D^2 f(\gamma(t))\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big) + Df(\gamma(t))\gamma''(t). \tag{2.1}$$

Beweis: Nach Kettenregel ist $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j'(t)$, und weiter

$$(f \circ \gamma)''(t) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j''(t).$$

□

Wir benötigen nun eine lokale Entwicklung, die die zweite Ableitung mit einbezieht.

Lemma 2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt*

$$\frac{f(x+h) - \big(f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h, h)\big)}{|h|^2} \to 0 \quad \text{mit } h \to 0.$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $\varphi(t) = f(x + th)$. Mit partieller Integration gilt

$$\varphi(1) - \big(\varphi(0) + \varphi'(0)\big) = \int_0^1 (\varphi'(t) - \varphi'(0))\, dt = \int_0^1 (1 - t) \varphi''(t)\, dt,$$

also folgt aus Lemma 2.1

$$f(x+h) - \big(f(x) + Df(x)h\big) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(x+th)(h,h)\,dt. \tag{2.2}$$

Daraus ergibt sich die Darstellung

$$f(x+h) - \big(f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h)\big) = \int_0^1 (1-t)\big(D^2 f(x+th)(h,h) - D^2 f(x)(h,h)\big)\,dt.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\partial_i \partial_j f(y) - \partial_i \partial_j f(x)| < \varepsilon$ für $|y-x| < \delta$. Für $|h| < \delta$ folgt

$$\sum_{i,j=1}^n \big|\big(\partial_i \partial_j f(x+th) - \partial_i \partial_j f(x)\big) h_i h_j\big| < n^2 |h|^2 \varepsilon,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Als zweites Hilfsmittel brauchen wir folgende Tatsache über quadratische Formen.

Lemma 2.3 *Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen Euklidischen Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Setze*

$$\lambda = \inf\{b(x,x) : x \in V,\ \|x\| = 1\}.$$

Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $b(v,v) = \lambda$.

Beweis: Sei zunächst $V = \mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = b(x,x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad \text{wobei } b_{ij} = b(e_i, e_j),$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^n$, und $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ ist kompakt. Die Existenz von v folgt also aus Satz 2.1 in Kapitel 4. Für V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ beliebig wählen wir eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Mit $T : \mathbb{R}^n \to V$, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, gilt dann $\|T(x)\| = |x|$. Wir können also das Bewiesene anwenden auf die Bilinearform $\tilde{b} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{b}(x,y) = b(T(x), T(y))$. □

Definition 2.4 *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit (bzw. positiv semidefinit), falls gilt:*

$$b(v,v) > 0 \quad (\text{bzw. } b(v,v) \geq 0) \quad \text{für alle } v \in V \backslash \{0\}.$$

Notation: $b > 0$ bzw. $b \geq 0$. Entsprechend für negativ (semi-)definit.

Bei der Monotonie ist es so, dass wir ausdrücklich den Begriff streng monoton verwenden, wenn wir Gleichheit ausschließen wollen. Hier ist der Sprachgebrauch ausnahmsweise anders, definit bedeutet automatisch die strikte Ungleichung. Eine Bilinearform, für die es $v, w \in V$ gibt mit $b(v,v) > 0$ und $b(w,w) < 0$ heißt *indefinit*. Ein Beispiel ist die Bilinearform $b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Anders als bei reellen Zahlen muss also nicht eine der Ungleichungen $b > 0$, $b = 0$ oder $b < 0$ eintreten.

Satz 2.2 (Lokale Extrema) *Sei $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x \in \Omega$.*

(a) *Wenn f in x ein lokales Minimum hat, so ist $D^2 f(x)$ positiv semidefinit.*

(b) *Ist $Df(x) = 0$ und $D^2 f(x)$ positiv definit, so hat f in x ein isoliertes lokales Minimum.*

Beweis: In (a) gilt $Df(x) = 0$ nach Satz 2.1. Für $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig hat $t \mapsto f(x+tv)$ bei $t = 0$ ein lokales Minimum, also folgt aus dem eindimensionalen Fall und (2.1)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(x+tv)|_{t=0} = D^2 f(x)(v,v).$$

Für (b) setzen wir $\lambda = \inf_{|v|=1} D^2 f(x)(v,v)$. Nach Lemma 2.3 gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, mit $D^2 f(x)(v,v) = \lambda$. Da $D^2 f(x)$ positiv definit ist, folgt insbesondere $\lambda > 0$. Sei nun für $h \neq 0$

$$R(h) = \frac{f(x+h) - \big(f(x) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h)\big)}{|h|^2}.$$

Nach Lemma 2.2 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|R(h)| < \varepsilon$ für $|h| < \delta$. Es folgt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^2} = \frac{1}{2} D^2 f(x)\Big(\frac{h}{|h|}, \frac{h}{|h|}\Big) + R(h) > \frac{\lambda}{2} - \varepsilon.$$

Behauptung (b) folgt, wenn wir zum Beispiel $\varepsilon = \lambda/4$ wählen. □

Um die Funktion in der Nähe eines kritischen Punkts zu verstehen, ist der folgende Satz aus der Linearen Algebra nützlich.

Satz 2.3 (Hauptachsentransformation) *Sei $b : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform auf dem n-dimensionalen, Euklidischen Vektorraum V. Dann existiert eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$, so dass gilt:*

$$b(v_i, v_j) = \lambda_i \, \delta_{ij} \qquad \textit{für alle } i,j = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Wir zeigen: für $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $b(v,v) = \inf\{b(x,x) : \|x\| = 1\} = \lambda$ gilt

$$b(v,w) = \lambda \langle v, w \rangle \qquad \text{für alle } w \in V. \tag{2.3}$$

Die Menge der $w \in V$ mit $b(v,w) = \lambda\langle v,w\rangle$ ist ein Unterraum, der v enthält; deshalb können wir $\langle v,w\rangle = 0$ und $\|w\| = 1$ annehmen. Dann ist $\|(\cos t)v + (\sin t)w\|^2 = 1$ für alle t, und (2.3) folgt aus der Minimumeigenschaft:

$$b(v,w) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b\big((\cos t)v + (\sin t)w, (\cos t)v + (\sin t)w\big)|_{t=0} = 0 = \lambda\langle v,w\rangle.$$

Jetzt konstruieren wir induktiv $v_1, \ldots, v_k$ orthonormal und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$b(v_i, w) = \lambda_i \langle v_i, w\rangle \qquad \text{für alle } w \in V.$$

Für $k = n$ folgt die Behauptung des Satzes, indem wir $w = v_j$ einsetzen. Seien $v_1, \ldots, v_{k-1}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ schon gefunden, wobei $1 \leq k < n$. Setze $V_k = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}^\perp$ und

$$\lambda_k = \inf\{b(x,x) : x \in V_k,\ \|x\| = 1\}.$$

Nach Lemma 2.3 gibt es ein $v_k \in V_k$ mit $\|v_k\| = 1$ und $b(v_k, v_k) = \lambda_k$, also gilt

$$b(v_k, w) = \lambda_k \langle v_k, w\rangle \quad \text{für alle } w \in V_k \quad \text{nach (2.3)}.$$

Aber für $1 \leq i < k$ liefert die Symmetrie von b und die Induktionsannahme

$$b(v_k, v_i) = b(v_i, v_k) = \lambda_i \langle v_i, v_k\rangle = 0 = \lambda_k \langle v_k, v_i\rangle.$$

Es folgt $b(v_k, w) = \lambda_k \langle v_k, w\rangle$ für alle $w \in V$, womit der Induktionsschluss gezeigt ist. $\square$

Ein Endomorphismus $B : V \to V$ eines Euklidischen Vektorraums V heißt symmetrisch (oder hermitesch), wenn die zugeordnete Bilinearform $b(v, w) = \langle Bv, w\rangle$ symmetrisch ist. Dann ist (2.3) äquivalent zu der Gleichung

$$Bv = \lambda v,$$

das heißt die v_k aus dem Satz sind Eigenvektoren von B zu den Eigenwerten λ_k. Wir haben also bewiesen: symmetrische Endomorphismen eines Euklidischen Vektorraums sind diagonalisierbar, und zwar in einer Orthonormalbasis. Für symmetrische Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bedeutet das äquivalent: es gibt eine Matrix $T \in \mathbb{O}(n)$, so dass $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist; dabei sind die Spaltenvektoren von T gerade die Eigenvektoren $v_k \in \mathbb{R}^n$ von B. Der Beweis durch Minimieren der quadratischen Form verwendet nicht das charakteristische Polynom, und kann auf gewisse symmetrische Operatoren in unendlichdimensionalen Hilberträumen verallgemeinert werden.

In den Koordinaten $x = x_1 v_1 + \ldots x_n v_n$ bezüglich der Eigenvektorbasis hat die quadratische Form die einfache Darstellung

$$b(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{mit } \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

Für $n = 2$ wollen wir die Mengen $M_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : b(x, x) = c\}$ beschreiben; dabei können wir nach Übergang zu $-b$ annehmen, dass $\lambda_2 > 0$ ist. Es ergeben sich drei Fälle:

$\lambda_1 > 0$: Im Nullpunkt hat $b(x, x)$ ein globales, isoliertes Minimum und für $c > 0$ ist M_c eine achsensymmetrische Ellipse mit Scheiteln in $(\pm\sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ und $(0, \pm\sqrt{c/\lambda_2})$.

$\lambda_1 = 0$: Auch hier ist im Nullpunkt ein globales Minimum, allerdings ist M_0 die gesamte x_1-Achse; für $c > 0$ besteht M_c aus den parallelen Geraden $x_2 = \pm\sqrt{c/\lambda_2}$.

$\lambda_1 < 0$: M_0 ist Vereinigung der beiden Ursprungsgeraden $x_2 = \pm\sqrt{-\lambda_1/\lambda_2}\, x_1$. Für $c > 0$ ist M_c eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit Scheiteln $(0, \pm\sqrt{c/\lambda_2})$ und M_0 als Asymptotenlinien. Für $c < 0$ erhalten wir ebenfalls eine Hyperbel mit Asymptoten M_0, die aber nach links und rechts geöffnet ist und die Scheitel $(\pm\sqrt{c/\lambda_1}, 0)$ hat.

Betrachten wir in den drei Fällen die zugehörigen Graphen im $\mathbb{R}^3$, so haben wir für $\lambda_1 > 0$ anschaulich eine Mulde, für $\lambda_1 = 0$ einen Hohlweg und für $\lambda_1 < 0$ einen Sattel. Aus der Mulde wird für $-b$ eine Kuppe. Es ist instruktiv, diese Beschreibung an expliziten Beispielen zu verfizieren und auch ein Bild der zugehörigen Graphen in $\mathbb{R}^3$ anzufertigen. Man nennt einen kritischen Punkt x von f nicht degeneriert, wenn die Bilinearform $D^2 f(x)$ nicht entartet ist beziehungsweise äquivalent wenn die Eigenwerte λ_i von $D^2 f(x)$ alle ungleich

Null sind. In diesem Fall bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte als den Index des kritischen Punkts. Die drei Fälle oben sind also der Reihe nach Index Null, degeneriert und Index Eins.

Definition 2.5 (konvexe Funktion) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Dann heißt $f : K \to \mathbb{R}$ konvex, falls für alle $x, y \in K$ gilt:*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

f heißt strikt konvex, falls die strikte Ungleichung gilt für $x \neq y$ und $t \in (0,1)$.

Wie man leicht sieht, ist Konvexität von f äquivalent dazu, dass der Epigraph

$$G^+(f) = \{(x,z) \in K \times \mathbb{R} : z \geq f(x)\}$$

eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist.

Satz 2.4 (Konvexitätskriterien) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $f \in C^1(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *f ist konvex.*

(b) *$f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x)$ für alle $x, y \in \Omega$.*

(c) *$\big(Df(y) - Df(x)\big)(y-x) \geq 0$ für alle $x, y \in \Omega$.*

Ist sogar $f \in C^2(\Omega)$, so ist außerdem äquivalent:

(d) *$D^2 f(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Die Aussage wird jeweils auf den eindimensionalen Fall reduziert, indem wir für $x, y \in \Omega$ die Funktion $\varphi(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f\big((1-t)x + ty\big)$ betrachten. Unter Voraussetzung (a) hat φ in $t = 0$ ein Minimum, daraus folgt (b):

$$0 \leq \varphi'(0) = f(y) - f(x) - Df(x)(y-x).$$

Aussage (c) folgt aus (b) durch Vertauschen von x und y und Addition. Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) zeigen wir durch Widerspruch. Angenommen $\varphi(t)$ hat in $\tau \in (0,1)$ ein Minimum $\varphi(\tau) < 0$. Für $t_1 < t_2$ gilt nach (c) mit $x(t) = (1-t)x + ty$

$$\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1}\big(Df(x(t_2)) - Df(x(t_1))\big)\big(x(t_2) - x(t_1)\big) \geq 0.$$

Für $t < \tau$ folgt $\varphi'(t) \geq \varphi'(\tau) = 0$, und hieraus $\varphi(0) \leq \varphi(\tau) < 0$, ein Widerspruch.

Sei nun $f \in C^2(\Omega)$. Mit $h = y - x$ folgt aus (2.2)

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(\varphi(t))(y-x, y-x)\, dt.$$

Dies zeigt die Implikation (d) $\Rightarrow$ (b). Umgekehrt folgt (d) aus (b) mit Satz 2.2, denn die Funktion $g(y) = f(y) - \big(f(x) + Df(x)(y-x)\big)$ hat in x ein Minimum. □

Eine Funktion f mit $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$ für alle $x, y \in \Omega$, $t \in [0,1]$, heißt konkav und es gelten entsprechende Aussagen mit umgekehrten Ungleichungen.

3 Taylorentwicklung

Wir wollen nun die Taylorentwicklung von Funktionen zunächst einer und dann mehrerer Variabler herleiten. Die Idee der Taylorentwicklung ist es, eine gegebene Funktion f mit einem Polynom zu vergleichen, das mit f an einer festen Stelle x_0 „von höherer Ordnung“ übereinstimmt, das heißt einschließlich einer Reihe von Ableitungen. Dieses Polynom sollte dann auch nahe bei x_0 die Funktion gut approximieren, und das will quantifiziert werden. Für lineare sowie quadratische Polynome haben wir das in den vorigen Abschnitten schon behandelt.

Zur Erinnerung: eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad k, wenn es $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_k \neq 0$, so dass

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Menge $\mathbb{P}_k$ der Polynome vom Grad höchstens k ist ein Untervektorraum des Raums aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Basis $1, x, \ldots, x^k$, vgl. Kapitel 2, Satz 3.9.

Lemma 3.1 *Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Zu $f \in C^k(I)$ gibt es genau ein Polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens k mit $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \ldots, k$, und zwar*

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j. \tag{3.1}$$

P_k heißt Taylorpolynom der Ordnung k von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Beweis: Wir betrachten die lineare Abbildung

$$F : \mathbb{P}_k \to \mathbb{R}^{k+1},\ F(P) = \big(P(0), P'(0), \ldots, P^{(k)}(0)\big).$$

Für $0 \leq j \leq k$ ist $(x - x_0)^j \in \mathbb{P}_k$ und $F\big((x-x_0)^j\big) = j! e_j$, also ist F surjektiv. Wegen $\dim \mathbb{P}_k \leq k+1$ ist F auch injektiv nach Dimensionsformel, insbesondere bilden die Funktionen $1, x - x_0, \ldots, (x - x_0)^k$ eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Mit (3.1) gilt $P_k^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $0 \leq j \leq k$, also ist P_k das gesuchte, eindeutig bestimmte Polynom. $\square$

Folgerung 3.1 *Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

In der Situation von Lemma 3.1 heißt die Funktion

$$R_k : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x) \tag{3.2}$$

das Restglied k-ter Ordnung der Taylorentwicklung in x_0. Knackpunkt bei der Taylorentwicklung ist die Abschätzung dieses Restglieds und damit eine Aussage darüber, wie gut die Funktion durch das Taylorpolynom approximiert wird. Hierfür gibt es verschiedene mögliche Darstellungen von R_k.

Satz 3.1 (Integraldarstellung des Restglieds) *Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ das k-te Taylorpolynom im Punkt $x_0 \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x) \quad \text{mit} \quad R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} (x-y)^k\, f^{(k+1)}(y)\, dy.$$

Beweis: Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Der Fall $k = 0$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(y)\,dy.$$

Der Induktionsschritt ist analog beruht auf partieller Integration, und zwar gilt für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
R_k(x) &= R_{k-1}(x) - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^x (x-y)^{k-1} f^{(k)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\left[-\frac{(x-y)^k}{k} f^{(k)}(y)\right]_{y=x_0}^{y=x} + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y)\,dy - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{1}{k!}\int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

□

Für die zweite Darstellung verwenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechung.

Lemma 3.2 (Kapitel 5, Folgerung 1.2) *Seien $f, \varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \geq 0$ auf I (oder $\varphi \leq 0$ auf I). Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit*

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi)\int_a^b \varphi.$$

Beweis: Wir nehmen $\varphi \geq 0$ an, und definieren die stetige Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^b \big(f(y) - f(x)\big)\varphi(y)\,dy.$$

Ist $x \in I$ Minimalstelle (Maximalstelle) von f, so folgt $F(x) \geq 0$ (bzw. $F(x) \leq 0$). Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in I$ mit $F(\xi) = 0$. □

Satz 3.2 (Lagrangedarstellung des Restglieds) *Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu $x_0, x \in I$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_k(x) \quad \textit{mit} \quad R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \tag{3.3}$$

Beweis: Sei zum Beispiel $x \geq x_0$, also $(x-y)^k \geq 0$ auf $[x_0, x]$. Wir wenden Lemma 3.2 auf die Integraldarstellung des Restglieds aus Satz 3.1 an und folgern für ein $\xi \in [x_0, x]$

$$R_k(x) = f^{(k+1)}(\xi)\int_{x_0}^x \frac{(x-y)^k}{k!}\,dy = f^{(k+1)}(\xi)\,\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

□

Beispiel 3.1 Betrachte für $x \in (-1,1)$ die Funktion $f(x) = (1-x)^{-1/2}$, mit Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}.$$

Es gilt $f(0) = 1$ und $f'(0) = 1/2$, also lautet das Taylorpolynom der Ordnung Eins in $x_0 = 0$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

mit der Lagrange-Restglieddarstellung

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = \frac{3}{8}(1-\xi)^{-5/2}x^2 \quad \text{für ein } \xi \in [0,x].$$

Als Anwendung erhalten wir für die relativistische Energie eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v, wenn wir $\beta = v/c$ setzen,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2}\beta^4\right) = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \Delta E.$$

Dabei ist der erste Term die Ruheenergie und der zweite die klassische kinetische Energie. Für den relativistischen Korrekturterm ergibt sich aus der Restglieddarstellung die Abschätzung

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi)\beta^2 \leq f''(\beta^2)\beta^2 < 0{,}008 \quad \text{für } \beta \leq 0{,}1.$$

Bei Geschwindigkeiten $v \leq \frac{1}{10}c$ beträgt die relativistische Korrektur weniger als ein Prozent der klassischen kinetischen Energie.

Allgemein gilt folgende Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms.

Satz 3.3 (Approximation durch das Taylorpolynom) *Sei $f \in C^k(I)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in I$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 3.2 gibt es zu $x \in I$ ein ξ zwischen x_0 ud x mit

$$\frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{f(x) - P_{k-1}(x)}{(x-x_0)^k} - \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0) = \frac{1}{k!}\big(f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)\big).$$

Da $f^{(k)}$ stetig, ist $|f^{(k)}(\xi) - f^{(k)}(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, womit die Konvergenz gegen Null bewiesen ist. Für die Eindeutigkeit ist zu zeigen: ist $P = \sum_{j=0}^k a_j(x-x_0)^j$ mit $(x-x_0)^{-k}P(x) \to 0$ für $x \to x_0$, so ist P das Nullpolynom. Ist induktiv $a_0 = \ldots = a_{j-1} = 0$ für ein $j \in \{0,\ldots,k\}$ gezeigt, so folgt aber

$$a_j = \lim_{x \to x_0}(x-x_0)^{-j}P(x) = \lim_{x \to x_0}(x-x_0)^{k-j}(x-x_0)^{-k}P(x) = 0.$$

□

Wir haben bis jetzt die Differenz $f(x) - P_k(x)$ für festes k und $x \to x_0$ untersucht. Jetzt nehmen wir einen anderen Standpunkt ein und fragen uns, ob die Folge $P_k(x)$ die Funktion $f(x)$ für $k \to \infty$ approximiert.

Definition 3.1 *Für $f \in C^\infty(I)$ und $x_0 \in I$ heißt die Reihe*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$

Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe, mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz vom Konvergenzradius gibt ein $R \in [0, \infty]$, so dass die Reihe für $|x - x_0| < R$ absolut konvergiert, für $|x - x_0| > R$ dagegen divergiert, siehe Kapitel 2, Satz 4.10. Selbst wenn die Reihe einen positiven Konvergenzradius hat, muss sie aber keineswegs gegen die gegebene Funktion konvergieren.

Beispiel 3.2 Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach Folgerung 2.4, Kapitel 4, insbesondere $f^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Also sind die Koeffizienten der Taylorreihe alle Null und damit auch alle Partialsummen, die Reihe konvergiert somit gegen die Nullfunktion, nicht gegen f. Übrigens hätten wir dies auch aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, Satz 4.11 in Kapitel 2, schließen können, denn die Menge $f^{-1}\{0\}$ hat einen Häufungspunkt in $x = 0$.

Definition 3.2 *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in (a, b)$ eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ gibt, auf der f als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar ist.*

Nach der folgenden Aussage kommt als Potenzreihe nur die Taylorreihe in Frage, und die Analytizität kann durch Abschätzung des Restglieds nachgewiesen werden.

Proposition 3.1 *Für $f : I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf I als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellbar.*

(b) *$f \in C^\infty(I)$, und für alle $x \in I$ konvergiert das k-te Restglied $R_k(x)$ der Taylorentwicklung in x_0 mit $k \to \infty$ gegen Null.*

Die darstellende Potenzreihe ist notwendig die Taylorreihe von f in x_0.

Beweis: Nach Voraussetzung in (a) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{j=0}^\infty a_j(x - x_0)^j$ auf I, also ist ihr Konvergenzradius mindestens $\delta > 0$. Nach Kapitel 5, Satz 3.3 und Lemma 3.1, ist dann $f \in C^\infty(I)$ und Ableitungen können durch gliedweise Differentiation ermittelt werden. Wir erhalten

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j j! \delta_{jk} = k! a_k.$$

Folglich ist die Potenzreihe die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0, und weiter

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j = f(x) - \sum_{j=0}^{k} a_j(x - x_0)^j \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty,$$

nach Voraussetzung. Umgekehrt folgt aus den Voraussetzungen von (b)

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j = P_k(x) = f(x) - R_k(x) \to f(x).$$

□

Die mehrdimensionale Taylorentwicklung orientiert sich am Fall $n = 1$, nur ist der Notationsaufwand größer. Im folgenden sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in C^k(\Omega)$ definieren wir die k-te Ableitung $D^k f(x)$ an der Stelle $x \in \Omega$ als k-Linearform $D^k f(x) : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f)(x)(v_1)_{i_1} \ldots (v_k)_{i_k}. \tag{3.4}$$

Ist außerdem Ω konvex, so betrachten wir für $x_0, x \in \Omega$ die C^k-Funktion, vgl. Folgerung 3.1,

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi(t) = f(x_0 + th) \quad \text{mit } h = x - x_0.$$

Wir zeigen nun durch Induktion die Formel

$$\varphi^{(k)}(t) = D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h). \tag{3.5}$$

Für $k = 1$ gilt das nach Kettenregel und Satz 3.1, denn

$$\varphi'(t) = Df(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x_0 + th) h_i.$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} (\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_{k-1}} f)(x_0 + th)\, h_i\, h_{i_1} \ldots h_{i_{k-1}} \\
&= D^k f(x_0 + th)(h, \ldots, h).
\end{aligned}$$

Satz 3.2, angewandt auf die Funktion φ, liefert sofort eine erste Fassung der mehrdimensionalen Taylorentwicklung.

Lemma 3.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass mit $h = x - x_0$ gilt:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j f(x_0)(h, \ldots, h)}{j!} + \frac{D^{j+1} f(\xi)(h, \ldots, h)}{(j+1)!}.$$

Beweis: Wir wenden auf die C^{k+1}-Funktion $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ die eindimensionale Taylorsche Formel an, mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$. Nach Satz 3.2 gibt es ein $\tau \in [0,1]$ mit

$$\varphi(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}.$$

Einsetzen von (3.5) liefert die Behauptung. □

Die k-te Ableitung $D^k f(x)(h,\dots,h)$ ist eine Summe von n^k Termen, von denen viele aber gleich sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen. Um dies ökonomischer zu gestalten, und vor allem um wie im Eindimensionalen eine Taylordarstellung mit Basispolynomen zu gewinnen, wird die sogenannte Multiindexnotation eingeführt. Für $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad \text{Ordnung von } \alpha,\\
\alpha! &= (\alpha_1)! \cdot \ldots \cdot (\alpha_n)! \quad \alpha\text{-Fakultät},\\
x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{Monom mit Exponent } \alpha,\\
D^\alpha &= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \quad (D^0 = \mathrm{Id}),
\end{aligned}$$

Die Zahl α_ν in D^α gibt also an, wie oft nach der Koordinate x_ν zu differenzieren ist.

Satz 3.4 (Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^{k+1}(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es zu x_0, $x \in \Omega$ ein $\xi = (1-\tau)x_0 + \tau x$, $\tau \in [0,1]$, so dass gilt:*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha.$$

Beweis: Die Anzahl der Tupel $(i_1,\dots,i_k)$ in $D^k f(x_0)(h,\dots,h)$, in denen nach jeder der Koordinaten x_ν genau α_ν-mal differenziert wird, ist

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \binom{k-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}{\alpha_n} = \frac{k!}{(\alpha_1)!\ldots(\alpha_n)!} = \frac{k!}{\alpha!}.$$

Die Behauptung folgt somit aus Lemma 3.3 und der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, siehe Kapitel 6, Folgerung 2.1. □

Mit Induktion über k sieht man, die Zahl der Multindizes mit $|\alpha| = k$ ist

$$\#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k\} = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{(n-1)!},$$

aber das werden wir nicht verwenden. Wir stellen nur fest, dass diese Zahl für große k etwa gleich $k^{n-1}/(n-1)!$ ist, und damit viel kleiner als n^k. Eine Funktion $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad $k \ge 0$, wenn es Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_\alpha \neq 0$ für mindestens ein α der Ordnung k, so dass

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha x^\alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $\mathbb{P}_k$ der Raum der Polynome im $\mathbb{R}^n$ vom Grad höchstens k, und

$$F : \mathbb{P}_k \to \mathbb{R}^N,\ F(P) = \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha P(x_0) e_\alpha.$$

Hier ist $N = N(n,k)$ die Anzahl der Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$, und die Standardbasis des $\mathbb{R}^N$ wird mit e_α, $|\alpha| \le k$, nummeriert. Wegen $F\big((x-x_0)^\alpha\big) = \alpha! e_\alpha$ für $|\alpha| \le k$ ist F

surjektiv und damit aus Dimensionsgründen injektiv, vgl. Lemma 3.1; die Monome $(x-x_0)^\alpha$, $|\alpha| \leq k$, bilden eine Basis von $\mathbb{P}_k$. Hieraus folgt (vgl. Lemma 3.1): das k-te Taylorpolynom

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \tag{3.6}$$

ist das eindeutige Polynom vom Grad höchstens k mit $D^\alpha P(x_0) = D^\alpha f(x_0)$ für $|\alpha| \leq k$.

Folgerung 3.2 *Das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt x_0 eines Polynoms f vom Grad höchstens k ist f selbst.*

Beispiel 3.3 (Polynomialformel) Die Funktion $f(x) = (x_1 + \ldots + x_n)^k$ ist ein Polynom vom Grad k, und es gilt

$$D^\alpha f(0) = \begin{cases} k! & \text{falls } |\alpha| = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Folgerung 3.2 (oder direkt durch Abzählen) ergibt sich

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Die Approximationseigenschaft des Taylorpolynoms gilt auch ganz analog, nur müssen wir im Nenner Beträge setzen, da bekanntlich durch Vektoren nicht dividiert werden kann.

Satz 3.5 (Approximation durch das Taylorpolynom im $\mathbb{R}^n$) *Sei $f \in C^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, und P_k das k-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$. Dann ist P_k das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad höchstens k mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_k(x)}{|x - x_0|^k} = 0.$$

Beweis: Nach Satz 3.4, mit k statt $k+1$, gibt es zu $x \in \Omega$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) - P_k(x) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Da $D^\alpha f$ stetig und $|(x - x_0)^\alpha| \leq |x - x_0|^k$, ist die Konvergenz gegen Null gezeigt. Für die Eindeutigkeit sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens k mit $|x - x_0|^{-k} P(x) \to 0$ für $x \to x_0$. Wäre P nicht das Nullpolynom, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$, mit $P(x) \neq 0$. Das eindimensionale Polynom $\varphi(t) = P(x_0 + t(x - x_0))$ hat Grad höchstens k, und es folgt

$$\left| \frac{\varphi(t)}{t^k} \right| = |x - x_0|^k \left| \frac{P(x_0 + t(x - x_0))}{|t(x - x_0)|^k} \right| \to 0 \quad \text{mit } t \to 0.$$

Nach Satz 3.3 ist φ das Nullpolynom, im Widerspruch zu $\varphi(1) = P(x) \neq 0$. □

Um das relative Verhalten von Funktionen bei Grenzprozessen zu beschreiben, werden oft die Landauschen Symbole $\mathcal{O}$ und o benutzt. Seien f, g zwei Funktionen, die auf $B_\delta(x_0)$ definiert sind, und es gelte $g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0. Dann schreibt man

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0,$$
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

In Worten: die Funktion $f(x)$ ist klein-o von $g(x)$ beziehungsweise groß-$\mathcal{O}$ von $g(x)$ für $x \to x_0$. Diese Begriffe sind analog für Grenzwerte $|x| \to \infty$ usw. erklärt. Im obigen Approximationssatz gilt $f(x) - P_k(x) = o(|x - x_0|^k)$ für $x \to x_0$, aber häufig wird das in Form einer Entwicklung geschrieben:

$$f(x) = P_k(x) + o(|x - x_0|^k) \quad \text{für } x \to x_0.$$

Beispiel 3.4 Wir berechnen hier mit der Multiindexnotation die Taylorentwicklung erster Ordnung im Punkt $(1,1)$ für

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Es ist $f(1,1) = 0$, und die partiellen Ableitungen der Funktion lauten

$$D^{(1,0)}f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad D^{(0,1)}f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$
$$D^{(2,0)}f(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3} \quad D^{(1,1)}f(x,y) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \quad D^{(0,2)}f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

Das Taylorpolynom erster Ordnung ist somit

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &= f(1,1) + D^{(1,0)}f(1,1)\big((x,y)-(1,1)\big)^{(1,0)} + D^{(0,1)}f(1,1)\big((x,y)-(1,1)\big)^{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{1}{2}(x-y). \end{aligned}$$

Das Restglied lautet in Lagrangedarstellung mit Zwischenpunkt (ξ, η)

$$\begin{aligned} R_1(x,y) &= \frac{D^{(2,0)}f(\xi,\eta)}{2!\,0!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(2,0)} + \frac{D^{(1,1)}f(\xi,\eta)}{1!\,1!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(1,1)} \\ &\quad + \frac{D^{(0,2)}f(\xi,\eta)}{0!\,2!}\big((x,y)-(1,1)\big)^{(0,2)} \\ &= \frac{2}{(\xi+\eta)^3}\big(-\eta(x-1)^2 + (\xi-\eta)(x-1)(y-1) + \xi(y-1)^2\big). \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die in der Nähe jedes Punkts $x_0 \in \Omega$ durch eine Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (x - x_0)^\alpha \quad \text{mit } a_\alpha \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden können, heißt reell-analytisch. Unsere eindimensionalen Überlegungen lassen sich auch in diesem Punkt verallgemeinern, worauf wir jedoch aus Zeitgründen verzichten.

4 Parameterabhängige Integrale

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandlen wir als Anwendung der partiellen Ableitung parameterabhängige Integrale. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall. Für eine gegebene Funktion $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, betrachten wir die neue Funktion

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy. \tag{4.7}$$

Diese Funktion wird als parameterabhängiges Integral bezeichnet, wobei die Parameter hier die Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ sind. Damit ϕ wohldefiniert ist, müssen die Integrale existieren, also sollte für jedes $x \in \Omega$ die Funktion $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$, Riemann-integrierbar sein. Wir interessieren uns für die Stetigkeit und Ableitung der Funktion $\phi(x)$. Dabei werden wir benutzen, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind, vgl. Kapitel 6, Satz 1.8.

Satz 4.1 (Stetigkeit von Parameterintegralen) *Sei $f \in C^0(\Omega \times I)$, $f = f(x,y)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$ kompakt. Dann ist die Funktion*

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy,$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis: Die Funktion ist wohldefiniert, denn für $x \in \Omega$ ist $f(x,\cdot) \in C^0(I)$, also Riemann-integrierbar. Zu $x \in \Omega$ gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit $K := \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \le \delta_0\} \subset \Omega$. Da $K \times I$ kompakt, ist $f : K \times I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, insbesondere gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$|f(x',y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Wir erhalten für $|x' - x| < \delta$ die Abschätzung

$$|\phi(x') - \phi(x)| \le \int_I |f(x',y) - f(x,y)|\,dy < \varepsilon.$$

□

Wir gehen direkt weiter zur Differenzierbarkeit und Berechnung der Ableitung.

Satz 4.2 (Differentiation unter dem Integral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I = [a,b]$. Für $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot) \in C^0(I)$ für alle $x \in \Omega$ setze $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int_I f(x,y)\,dy$. Ist $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega \times I)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, so folgt*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,dy.$$

Sind f und $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ in $C^0(\Omega \times I)$, so ist $\phi \in C^1(\Omega)$.

Beweis: Zu $x \in \Omega$ wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K = \{x' \in \mathbb{R}^n : |x' - x| \leq \delta_0\} \subset \Omega$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ gleichmäßig stetig auf $K \times I$ ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \delta_0]$, so dass für alle $y \in I$ gilt:

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x', y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{für } |x' - x| < \delta.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{ds} f(x + she_j, y)\, ds = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y)\, ds.$$

Für $h \in [-\delta, \delta]$ und $s \in [0, 1]$ ist $|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)| < \varepsilon/(b - a)$, also

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h} - \int_I \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy\Big| &= \Big|\int_I \Big(\frac{f(x + he_j, y) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big)\, dy\Big| \\
&= \Big|\int_I \int_0^1 \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\big)\, ds dy\Big| \\
&\leq \int_I \int_0^1 \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + she_j, y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\Big|\, ds dy \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Differentiationsregel gezeigt. Die Zusatzaussage folgt nun aus Satz 4.1. □

Beispiel 4.1 Wir berechnen hier das Integral der Gaußschen Dichtefunktion (das früher auf 10-Mark-Scheinen zu finden war)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Der Beweis ist trickreich und ich bezweifle, dass ich selbst auf ihn gekommen wäre. Und zwar betrachten wir die Funktion

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = \Big(\int_0^x e^{-\xi^2} d\xi\Big)^2,$$

und berechnen mit dem Hauptsatz und anschließender Substitution $\xi = xy$, also $d\xi = xdy$,

$$F'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi = \int_0^1 2xe^{-(1+y^2)x^2}\, dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy,$$

wobei $f(x, y) = -e^{-(1+y^2)x^2}/(1 + y^2)$. Da f auf $(0, \infty) \times [0, 1]$ glatt ist, können wir nach Satz 4.2 den Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ herausziehen, und mit $\phi(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy$ folgt

$$\phi'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy = F'(x).$$

Nun gilt $F(0) - \phi(0) = \int_0^1 (1 + y^2)^{-1}\, dy = \arctan 1 = \pi/4$, also $F(x) = \phi(x) + \pi/4$ für alle $x \in [0, \infty)$. Aber $|\phi(x)| \leq e^{-x^2} \to 0$ mit $x \to \infty$, und so

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{x\to\infty} \sqrt{F(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

In dieser Vorlesung werden wir aus Zeitgründen kein mehrdimensionales Integral behandeln, dies soll in Analysis 3 ausführliches Thema sein. Immerhin können wir als nützliche Anwendung hier die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge in Mehrfachintegralen folgern.

Satz 4.3 (Kleiner Fubini) *Seien $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$ kompakte Intervalle. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right) dx \qquad \text{für } f \in C^0(I \times J).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktionen $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^x f(\xi, y)\, d\xi \right) dy \quad \text{und} \quad \psi(x) = \int_a^x \left(\int_\alpha^\beta f(\xi, y)\, dy \right) d\xi.$$

Nach Satz 4.1 sind $y \mapsto \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$ sowie $\xi \mapsto \int_\alpha^\beta f(\xi, y)\, dy$ stetig, und damit beide Seiten wohldefiniert mit $\phi(a) = \psi(a) = 0$. Wir zeigen $\phi'(x) = \psi'(x)$ für alle $x \in I$, woraus die Behauptung $\phi(b) = \psi(b)$ folgt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$\psi'(x) = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

Weiter hat die Funktion $F(x, y) = \int_a^x f(\xi, y)\, d\xi$ die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x} = f \in C^0(I \times J)$, und aus Satz 4.2 folgt

$$\phi'(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy.$$

□

Viele interessante Parameterintegrale sind uneigentliche Integrale, zum Beispiel bei der Definition der Gammafunktion oder der Fouriertransformation. Aus Zeitgründen können wir darauf jetzt nicht eingehen, werden aber Parameterintegrale nochmals innerhalb der Theorie des Lebesgue-Integrals im dritten Semester aufgreifen.

Kapitel 8

Kurvenintegrale und komplexe Analysis

1 Kurvenintegrale

Wir kehren hier zur eindimensionalen Analysis zurück und interessieren uns zunächst für Kurven im $\mathbb{R}^n$. Man bezeichnet jede stetige Abbildung eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ als Kurve. Dies hört sich zunächst vernünftig an, allerdings lässt die Forderung der Stetigkeit noch Abbildungen zu, die anschaulich weit entfernt davon sind, eine Kurve zu sein. So hat G. Peano 1905 stetige Kurven konstruiert, die das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf die Fläche eines Dreiecks abbilden. Wir sollten also lieber etwas mehr verlangen als nur Stetigkeit.

Definition 1.1 (C^1-Kurve) *Ist $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, I Intervall, so heißt γ C^1-Kurve im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 1.1 Für $p, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $\gamma(t) = p + tv$ eine parametrisierte Gerade. Der Fall $v = 0$ ist jedoch durch Definition 1.1 nicht ausgeschlossen. Die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad \text{mit } r > 0,$$

durchläuft den Kreis vom Radius r um den Nullpunkt unendlich oft. Durch Hinzufügen einer dritten Komponente entsteht die Schraubenlinie

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at) \quad \text{für } a > 0.$$

Bei einem Umlauf wächst die dritte Komponente um die Höhe $2\pi a$. Das Bild der Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$$

sieht aus wie eine etwas deformierte Acht.

Definition 1.2 (Bogenlänge) *Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, $I = [a,b]$, ist*

$$L(\gamma) = \int_I |\gamma'|.$$

Eigentlich müsste diese Formel durch Approximation von γ mit Polygonzügen, deren Länge elementar definiert ist, begründet werden. Für eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ sollte näherungsweise gelten:

$$\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \Big| \approx \sum_{i=1}^{N} |\gamma'(t_i)| \Delta t_i \approx \int_I |\gamma'(t)|\, dt.$$

Wir verzichten aber hier darauf, dieses Argument rigoros zu machen.

Beispiel 1.2 Die Länge von $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, at)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ist

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |(-r \sin t, r \cos t, a)|\, dt = 2\pi \sqrt{r^2 + a^2}.$$

Die Schraubenlinie verläuft auf dem Mantel des Zylinders $x^2 + y^2 = r^2$, und man kann das Ergebnis durch Abrollen des Zylinders mit dem Satz des Pythagoras bestätigen.

Anschaulich besteht eine Kurve aus ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ und einem Fahrplan, wie dieses Bild durchlaufen werden soll. In der Physik spielt der Fahrplan eine wesentliche Rolle, zum Beispiel für unsere Jahreszeiten. Die Bogenlänge ist jedoch eine geometrische Größe, und sollte nicht vom Fahrplan abhängen. Das soll nun präzisiert werden.

Definition 1.3 (Umparametrisierung) *Seien $\gamma_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte Kurven. Dann heißt γ_2 Umparametrisierung von γ_1, falls eine Bijektion $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$ existiert, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Die Bijektion φ nennt man auch Parametertransformation. An dieser Stelle ergibt sich die Frage, warum wir die Bedingung $\varphi' \neq 0$ verlangen. Eine Antwort ist, dass wir jedenfalls die Differenzierbarkeit der Parametertransformationen verlangen wollen, außerdem sollte die Sache symmetrisch bezüglich γ_1 und γ_2 sein. Die Bedingung $\varphi' \neq 0$ ist aber äquivalent dazu, dass die inverse Parametertransformation φ^{-1} differenzierbar ist. Tatsächlich ist die Relation $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls γ_2 Umparametrisierung von γ_1, eine Äquivalenzrelation (Übungsaufgabe).

Lemma 1.1 (Invarianz der Bogenlänge) *Sind $\gamma_{1,2} \in C^1(I_{1,2}, \mathbb{R}^n)$ und ist γ_2 eine Umparametrisierung von γ_1, so folgt $L(\gamma_2) = L(\gamma_1)$.*

Beweis: Sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ für $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ mit $\varphi' \neq 0$. Dann folgt je nach Vorzeichen von φ'

$$|\gamma_2'(t)| = |\gamma_1'(\varphi(t))||\varphi'(t)| = \pm |\gamma_1'(\varphi(t))| \varphi'(t),$$

also liefert die Substitution $s = \varphi(t)$ für $I_1 = [a_1, b_1]$ sowie $I_2 = [a_2, b_2]$

$$L(\gamma_2) = \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_2'(t)|\, dt = \pm \int_{a_2}^{b_2} |\gamma_1'(\varphi(t)|\, \varphi'(t)\, dt = \pm \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} |\gamma_1'(s)|\, ds = L(\gamma_1).$$

□

Es ist eine naheliegende Frage, ob für eine gegebene Kurve eine besonders schöne Umparametrisierung existiert. Was dabei besonders schön sein soll, sagt folgende Definition.

Definition 1.4 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Eine Kurve $c \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt:*

$$|c'(s)| = 1 \quad \textit{für alle } s \in I.$$

Physikalisch betrachtet wird eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Absolutgeschwindigkeit Eins durchlaufen. Geometrisch folgt für jedes Teilintervall $[a,b] \subset I$

$$L\big(c|_{[a,b]}\big) = \int_a^b |c'(s)|\, ds = (b-a),$$

das heißt das Intervall wird durch c längentreu abgebildet.

Satz 1.1 (Parametrisierung nach der Bogenlänge) *Sei $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ eine Kurve mit Länge $L = L(\gamma)$. Es gelte $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gibt es eine C^1-Bijektion $\varphi : [0,L] \to [a,b]$ mit $\varphi' > 0$, so dass $c = \gamma \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis: Wir betrachten die Bogenlängenfunktion

$$\sigma : [a,b] \to [0,L],\ \sigma(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau. \tag{1.1}$$

Es gilt $\sigma'(t) = |\gamma'(t)| > 0$ nach Voraussetzung, also ist σ eine Bijektion der Klasse C^1. Bezeichnet $\varphi : [0,L] \to [a,b]$ die Umkehrfunktion, so folgt

$$|(\gamma \circ \varphi)'(s)| = |\gamma'(\varphi(s))|\, \varphi'(s) = |\gamma'(\varphi(s))|\, \frac{1}{\sigma'(\varphi(s))} = 1.$$

$\square$

Eine Kurve γ mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle t nennt man regulär (oder immergiert). Verzichtet man auf die Bedingung der Regularität, so kann das Bild sogar einer C^∞-Kurve Singularitäten aufweisen. Ein Beispiel ist die Neilsche Parabel $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Das Bild $\gamma(\mathbb{R}) = \{(x, \pm x^{3/2}) : x \in \mathbb{R}\}$ hat eine Spitze im Nullpunkt. Die Regularität einer Kurve bleibt unter Umparametrisierungen erhalten, denn es gilt $(\gamma \circ \varphi)' = (\gamma' \circ \varphi)\varphi'$ mit $\varphi' \neq 0$ nach Definition. Insbesondere kann auf die Voraussetzung $\gamma' \neq 0$ in Satz 1.1 nicht verzichtet werden.

Ist der Endpunkt einer Kurve der Anfangspunkt einer zweiten Kurve, so ist es naheliegend, diese zu einer Kurve zusammenzusetzen. Im allgemeinen wird das Ergebnis dann keine C^1-Kurve mehr sein. Auch stückweise lineare Kurven sind in der Regel nicht C^1. Es ist daher praktisch, als Verallgemeinerung stückweise C^1-Kurven einzuführen.

Definition 1.5 (stückweise C^1) *Eine Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ heißt stückweise C^1, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ gibt, so dass mit $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gilt:*

$$\gamma|_{I_k} \in C^1(I_k,\mathbb{R}^n) \quad \textit{für alle } k = 1,\ldots,N.$$

Notation: $\gamma \in PC^1(I,\mathbb{R}^n)$ (piecewise continuously differentiable).

In den Unterteilungspunkten existieren die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\gamma'_\pm(t_i)$, die jedoch nicht übereinstimmen müssen. Setzen wir willkürlich $\gamma'(t_i) = 0$, so ist die Funktion $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stückweise stetig, insbesondere ist $|\gamma'| : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, siehe Kapitel 5, Abschnitt 1. Die Bogenlänge ist also auch für $\gamma \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ durch Definition 1.2 erklärt. Insbesondere hängt die Länge nicht von der Wahl der Unterteilung ab.

Im Folgenden bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.6 *Ist $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$, so heißt*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} := \int_a^b \langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\rangle \, dt$$

das Kurvenintegral von F längs c.

In der Physik ist zum Beispiel F das Gravitationsfeld, und das Kurvenintegral ergibt die Arbeit, die beim Transport einer Masse längs einer Kurve innerhalb des Feldes verrichtet wird. Dabei wird $\vec{dx}$ als vektorielles Längenelement interpretiert, und der Punkt $\cdot$ bedeutet das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Wir haben diese Notation übernommen, obwohl sie für uns rein symbolisch ist, das heißt $\vec{dx}$ hat keine eigene mathematische Bedeutung, ähnlich wie beim Riemannintegral. Das Kurvenintegral ist allein durch die rechte Seite in Definition 1.6 erklärt. Allerdings ist die Merkregel, dass $\vec{dx}$ durch $\gamma'(t)\, dt$ zu ersetzen ist, hilfreich.

Beispiel 1.3 (Gravitationsfeld) Das Gravitationsfeld der Sonne ist gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3,\ F(x) = -C \frac{x}{|x|^3} \quad \text{mit } C > 0.$$

Beispiel 1.4 (Winkelvektorfeld) Wir betrachten hier das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x, y) = \Big(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \Big).$$

Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\gamma(t) = r(t)\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big)$ mit $r, \theta \in C^1(I)$, so folgt

$$\int_\gamma W \cdot \vec{dx} = \int_a^b \left\langle \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}, r' \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + r\theta' \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle dt = \theta(b) - \theta(a). \tag{1.2}$$

Also liefert das Kurvenintegral von W die Differenz der Polarwinkel von Endpunkt und Anfangspunkt der Kurve.

Eine Parametertransformation $\varphi : I_2 \to I_1$ heißt orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), wenn $\varphi' > 0$ (bzw. $\varphi' < 0$) ist. Anschaulich wird bei Umparametrisierung mit einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation die Kurve umgekehrt durchlaufen, Anfangs- und Endpunkt tauschen ihre Rollen. Während die Bogenlänge unter allen Umparametrisierungen invariant ist, ist das Kurvenintegral nur bei orientierungserhaltenden Umparametrisierungen invariant, bei orientierungsumkehrenden Umparametrisierungen wechselt es sein Vorzeichen. Dies wird sogleich gezeigt.

Lemma 1.2 *Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Linearität: sind $F_{1,2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^2)$ und $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, so gilt für $\gamma \in PC^1([a,b],\Omega)$*

$$\int_\gamma (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \cdot \vec{dx} = \lambda_1 \int_\gamma F_1 \cdot \vec{dx} + \lambda_2 \int_\gamma F_2 \cdot \vec{dx}.$$

(b) *Additivität bei Zerlegungen: ist $\gamma \in PC^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ und $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, so folgt mit $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$*

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} F \cdot \vec{dx}.$$

(c) *Invarianz bei Umparametrisierungen: sei $\gamma \in PC^1(I_1, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(I_2, I_1)$ eine Parametertransformation. Dann gilt, je nach Vorzeichen von φ',*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} F \cdot \vec{dx} = \pm \int_\gamma F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: (a) und (b) folgen aus der Definition und den Eigenschaften des Riemannintegrals. Für (c) sei $I_1 = [a_1, b_1]$ und $I_2 = [a_2, b_2]$. Mit der Substitution $\varphi(t) = s$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} F \cdot \vec{dx} &= \int_{a_2}^{b_2} \langle (F \circ \gamma \circ \varphi)(t), (\gamma \circ \varphi)'(t) \rangle \, dt \\
&= \int_{a_2}^{b_2} \langle F \circ \gamma(\varphi(t)), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) \, dt \\
&= \int_{\varphi(a_2)}^{\varphi(b_2)} \langle (F \circ \gamma)(s), \gamma'(s)) \rangle ds.
\end{aligned}$$

Ist φ orientierungserhaltend, so gilt $\varphi(a_2) = a_1$ und $\varphi(b_2) = b_1$ und wir bekommen das Kurvenintegral. Ist φ orientierungsumkehrend, so sind die Grenzen vertauscht und wir bekommen das negative Kurvenintegral. □

Wir benötigen wie beim Riemann-Integral eine Standardabschätzung des Kurvenintegrals.

Lemma 1.3 *Sei $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ mit $I = [a,b]$. Dann gilt mit $\|F \circ \gamma\|_I = \sup_{t \in I} |F(\gamma(t))|$*

$$\left| \int_\gamma F \cdot \vec{dx} \right| \leq \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).$$

Beweis: Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Standardabschätzung des Riemann-Integrals folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \right| &\leq \int_a^b \big| \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \big| \, dt \\
&\leq \int_a^b \big| F(\gamma(t)) \big| \, \big| \gamma'(t) \big| \, dt \\
&\leq \|F \circ \gamma\|_I \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \\
&= \|F \circ \gamma\|_I \, L(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Die Physiker nennen das Gravitationsfeld konservativ, weil der Energieerhaltungssatz gilt. Die verrichtete Arbeit zum Beispiel bei Transport einer Masse vom Mathematischen Institut zum Kandel entspricht genau der zugewonnen Lageenergie, und diese kommt beim Herunterrollen auch wieder heraus, theoretisch jedenfalls. Der Begriff des konservativen Feldes ist auch in der Mathematik interessant.

Definition 1.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ heißt Gradientenfeld (bzw. konservativ), wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\operatorname{grad}\varphi = F$. Die Funktion φ heißt Stammfunktion (bzw. Potential) von F.*

Lemma 1.4 (Eindeutigkeit der Stammfunktion) *Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wegweise zusammenhängend, so ist eine Stammfunktion von $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt, bis auf eine additive Konstante.*

Beweis: Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\Omega)$ Stammfunktionen von F, so folgt

$$\operatorname{grad}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{grad}\varphi_2 - \operatorname{grad}\varphi_1 = F - F = 0,$$

also ist $\varphi_2 - \varphi_1$ konstant nach Satz 1.1, das heißt $\varphi_2 = \varphi_1 + c$. □

Wir werden jetzt sehen, dass die Existenz einer Stammfunktion gleichbedeutend damit ist, dass das Kurvenintegral für Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets denselben Wert hat. Zuvor eine Definition.

Definition 1.8 *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Aus $\gamma(a) = \gamma(b)$ folgt nicht notwendig $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, zum Beispiel ist im Fall der Acht aus Beispiel 1.1 $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = (0, 0)$, während $\gamma'(\pi/2) = (-1, -2) \neq (1, -2) = \gamma'(3\pi/2)$. Anschaulich schneidet sich die Kurve hier mit einem Winkel.

Satz 1.2 (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegweise zusammenhängend. Für ein Vektorfeld $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *F ist ein Gradientenfeld.*

(b) *Für jede geschlossene Kurve $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ ist $\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0$.*

(c) *Für je zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist $F = \operatorname{grad}\varphi$ mit $\varphi \in C^1(\Omega)$, so folgt für $\gamma \in PC^1([a, b], \Omega)$ geschlossen

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_a^b \langle \operatorname{grad}\varphi\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t)\, dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0.$$

Für $\gamma_{0,1} \in PC^1([a, b], \Omega)$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_1(2b - t) & b \leq t \leq 2b - a \end{cases}$$

geschlossen und stückweise C^1, und aus (b) ergibt sich mit Lemma 1.2

$$0 = \int_\gamma F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Für (c) $\Rightarrow$ (a) sei $x_0 \in \Omega$ fest. Zu $x \in \Omega$ wählen wir eine Kurve $\gamma_x \in PC^1([0,1],\Omega)$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$, und setzen

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx}.$$

Die Existenz von γ_x ist gesichert nach Lemma 1.2 in Kapitel 7, genauer können wir γ_x stückweise linear wählen. Nach Voraussetzung (c) hängt das Kurvenintegral nicht von der Wahl von γ_x ab. Daher ist die Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sei nun $x \in \Omega$. Für $|h|$ klein erhalten wir eine Kurve von x_0 nach $x + he_j$, indem wir γ_x mit der Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = x + the_j$, zusammensetzen. Es folgt

$$\frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} = \int_c F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F(x+the_j), e_j\rangle\, dt \to F_j(x) \quad \text{mit } h \to 0.$$

Also gilt $\partial_j \varphi = F_j$ für $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Die zentrale Frage dieses Kapitels ist: wie können wir entscheiden, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Für C^1-Vektorfelder gibt es eine notwendige Bedingung, die offensichtlich ist.

Satz 1.3 (Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$*

$$\partial_i F_j = \partial_j F_i \quad \text{in } \Omega.$$

BEWEIS: Ist $F = \operatorname{grad} \varphi$, so folgt $\varphi \in C^2(\Omega)$ und wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt

$$\partial_i F_j = \partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi = \partial_j F_i.$$

$\square$

Für $n = 3$ lässt sich die Bedingung schreiben als $\operatorname{rot} F = 0$, wobei

$$\operatorname{rot} F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

Beispiel 1.5 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y, x)$, hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^2$, denn

$$\partial_1 F_2 = 1, \text{ aber } \partial_2 F_1 = -1.$$

Beispiel 1.6 Für das Winkelvektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ W(x,y) = \Big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big)$$

vgl. Beispiel 1.4, berechnen wir

$$\partial_1 W_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_2 W_1,$$

das heißt die notwendige Bedingung aus Satz 1.3 ist erfüllt. Dennoch ist das Kurvenintegral nicht wegunabhängig: für $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ ist die Kurve $\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $\gamma_k(t) = r(\cos kt, \sin kt)$, geschlossen und es gilt nach Beispiel 1.4

$$\int_{\gamma_k} W \cdot \vec{dx} = 2\pi k \quad (\neq 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}).$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Kurvenintegral längs einer Schar von Kurven ändert. Statt Schar verwenden wir den moderneren Ausdruck Homotopie. Dies ist ein fundamentales Konzept der Analysis.

Definition 1.9 (Homotopie) *Eine Homotopie in Ω zwischen Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist eine Abbildung $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ mit*

$$\gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \quad \text{und} \quad \gamma(\cdot, 1) = \gamma_1.$$

Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = p$, $\gamma(b,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 homotop in Ω mit festen Endpunkten. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$, und gibt es eine Homotopie mit $\gamma(a,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$, so heißen γ_0, γ_1 in Ω geschlossen homotop.

Es gilt folgende allgemeine Formel für die Änderung des Kurvenintegrals unter (hinreichend glatten) Homotopien.

Lemma 1.5 (Homotopieformel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für $\gamma \in C^1([a,b] \times [0,1], \Omega)$, falls $\partial_s\partial_t\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \mathbb{R}^2)$,*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} &= \int_{\gamma(b,\cdot)} F \cdot \vec{dx} - \int_{\gamma(a,\cdot)} F \cdot \vec{dx} \\ &\quad + \int_0^1 \int_a^b \Big(\big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle - \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big)\, ds dt.\end{aligned}$$

Gilt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i,j = 1, \ldots, n$, und hat die Homotopie feste Endpunkte oder ist geschlossen, so ist die rechte Seite Null.

Beweis: Nach Zusatz zum Satz von Schwarz, Satz 2.2 in Kapitel 6, gilt $\partial_t\partial_s\gamma = \partial_s\partial_t\gamma$. Wir berechnen mit Satz 4.2 und partieller Integration bezüglich $s \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{\gamma(\cdot,t)} F \cdot \vec{dx} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \big\langle F(\gamma(s,t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s,t) \big\rangle\, ds \\ &= \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \int_a^b \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s} \big\rangle\, ds \\ &= \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \big\rangle\, ds + \big\langle F \circ \gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle \Big|_{s=a}^{s=b} - \int_a^b \big\langle DF \circ \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} \big\rangle\, ds.\end{aligned}$$

Integration bezüglich t ergibt die Formel. Ist $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ oder mit anderen Worten DF symmetrisch, so verschwindet das Doppelintegral. Bei festen Endpunkten sind $\gamma(\cdot, a)$ und $\gamma(\cdot, b)$ konstant, also die zugehörigen Kurvenintegrale Null. Ist die Homotopie geschlossen, so gilt $\gamma(\cdot, a) = \gamma(\cdot, b)$ und die Kurvenintegrale rechts heben sich gegenseitig weg. □

Wir können an dieser Stelle als Anwendung den Fundamentalsatz der Algebra (Kapitel 2, Satz 3.10) beweisen. Es gibt vielleicht einfachere Beweise, aber dieses Argument ist jedenfalls sehr anschaulich.

Satz 1.4 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir verwenden das Winkelvektorfeld $W : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^2$. Nach Beispiel 1.6 gilt $\partial_1 W_2 = \partial_2 W_1$. Sei $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$. Schreibe $p(z) = p_n(z) + q(z)$ mit $p_n(z) = z^n$. Da q höchstens den Grad $n-1$ hat, gilt $z^{-n}q(z) \to 0$ mit $|z| \to \infty$, also für $R > 0$ hinreichend groß

$$|q(Re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2}R^n \quad \text{für } \theta \in [0, 2\pi].$$

Betrachte nun die geschlossene Kurve $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_0(\theta) = p(Re^{i\theta})$, und die Homotopie

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(\theta, t) = p_n(Re^{i\theta}) + (1-t)q(Re^{i\theta}).$$

Wir berechnen

$$|\gamma(\theta, t)| \geq |p_n(Re^{i\theta})| - |q(Re^{i\theta})| \geq R^n - \frac{1}{2}R^n > 0.$$

Da $\gamma(\theta, 1) = p_n(Re^{i\theta}) = R^n e^{in\theta}$, folgt aus Lemma 1.5 und Beispiel 1.6

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma(\cdot,1)} W \cdot \vec{dx} = 2\pi n.$$

Wir betrachten jetzt eine zweite, ebenfalls glatte Homotopie:

$$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \times [0, R] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(\theta, \varrho) = p(\varrho e^{i\theta}).$$

Es ist $\tilde{\gamma}(\theta, 0) = p(0) = a_0$ eine konstante Abbildung. Hätte p keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist auch dies eine geschlossene Homotopie in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, und es folgt wieder mit Lemma 1.5

$$\int_{\gamma_0} W \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} W \cdot \vec{dx} = 0,$$

das heißt $2\pi n = 0$, ein Widerspruch. □

Lemma 1.6 (affine Homotopie) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Für Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ betrachte die affine Homotopie*

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma(s, t) = (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s).$$

Haben γ_0, γ_1 gleiche Endpunkte oder sind geschlossen, und gilt $\gamma([a, b] \times [0, 1]) \subset \Omega$, so folgt

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Sind $\gamma_0, \gamma_1 \in C^1([a, b], \Omega)$, so folgt die Aussage direkt aus Lemma 1.5. Für γ_0, γ_1 stückweise C^1 zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle, auf denen beide Kurven C^1 sind, und wenden Lemma 1.5 auf den Teilintervallen an. Die Randintegrale heben sich bei Addition heraus. □

Satz 1.5 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf Ω für $1 \leq i, j \leq n$. Sind dann $\gamma_0, \gamma_1 \in PC^1([a, b], \Omega)$ homotop in Ω mit festen Endpunkten (oder geschlossen homotop), so gilt*

$$\int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx}.$$

Beweis: Ist die Homotopie hinreichend glatt, so folgt die Aussage aus Lemma 1.5. Es geht also um das technische Problem, dass die gegebene Homotopie $\gamma \in C^0([a,b] \times [0,1], \Omega)$ eventuell nur stetig ist. Die Lektüre des Beweises könnte zurückgestellt werden.

Aus Kompaktheitsgründen gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{2\varepsilon}(p) \subset \Omega$ für alle $p \in \gamma([a,b] \times [0,1])$, vgl. Lemma 1.1 in Kapitel 7. Da γ auf der kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es weiter ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s_0,t) - \gamma(s_1,t)|,\, |\gamma(s,t_0) - \gamma(s,t_1)| < \varepsilon \quad \text{für } |s_0 - s_1|,\, |t_0 - t_1| < \delta.$$

Wir ersetzen jetzt $\gamma(\cdot,t)$ durch stückweise lineare Kurven. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $(b-a)/N < \delta$ und $s_k = a + k(b-a)/N$, $k = 0,1,\ldots,N$, definieren wir $\tilde{\gamma} : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{\gamma}(s,t) = \frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_{k-1},t) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\gamma(s_k,t) \quad \text{für } s \in [s_{k-1}, s_k].$$

Es gilt $\tilde{\gamma}(a,t) = \gamma(a,t)$, $\tilde{\gamma}(b,t) = \gamma(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$. Für $s \in [s_{k-1}, s_k]$ haben wir

$$|\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| = \Big|\frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_{k-1},t) - \gamma(s,t)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_k,t) - \gamma(s,t)\big)\Big| < \varepsilon.$$

Für $\lambda \in [0,1]$ folgt $\big|\big(1-\lambda)\gamma(s,t) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t)\big) - \gamma(s,t)\big| \leq |\tilde{\gamma}(s,t) - \gamma(s,t)| < \varepsilon$, das heißt die affine Homotopie zwischen $\gamma(\cdot,t)$ und $\tilde{\gamma}(\cdot,t)$ liegt in Ω. Insbesondere folgt aus Lemma 1.6

$$\text{(1.3)} \qquad \int_{\gamma_0} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,0)} F \cdot \vec{dx} \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_1} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,1)} F \cdot \vec{dx}.$$

Weiter gilt für $|t_0 - t_1| < \delta$ und $s \in [s_{k-1}, s_k]$

$$|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \tilde{\gamma}(s,t_1)| = \Big|\frac{s_k - s}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_{k-1},t_0) - \gamma(s_{k-1},t_1)\big) + \frac{s - s_{k-1}}{s_k - s_{k-1}}\big(\gamma(s_k,t_0) - \gamma(s_k,t_1)\big)\Big| < \varepsilon,$$

und es folgt für alle $\lambda \in [0,1]$

$$\big|\big((1-\lambda)\tilde{\gamma}(s,t_0) + \lambda\tilde{\gamma}(s,t_1)\big) - \gamma(s,t_0)\big| \leq \big|\tilde{\gamma}(s,t_1) - \tilde{\gamma}(s,t_0)\big| + \big|\tilde{\gamma}(s,t_0) - \gamma(s,t_0)\big| < 2\varepsilon.$$

Für $1/N < \delta$ folgt mit $t_l = l/N$ für $l = 0,1,\ldots,N$ aus Lemma 1.6

$$\int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_l)} F \cdot \vec{dx} = \int_{\tilde{\gamma}(\cdot,t_{l-1})} F \cdot \vec{dx} \quad \text{für } l = 1,\ldots,N,$$

und Kombination mit (1.3) beweist den Satz. □

Definition 1.10 *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a,b], \Omega)$ in Ω geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve ist.*

Beispiel 1.7 Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es ein $x_0 \in \Omega$ gibt mit

$$(1-t)x + tx_0 \in \Omega \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ t \in [0,1].$$

Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend, denn jede geschlossene Kurve $\gamma_0 \in C^0([a,b], \Omega)$ ist homotop zur konstanten Kurve in x_0, nämlich durch die Homotopie

$$\gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega,\ \gamma(s,t) = (1-t)\gamma_0(s) + tx_0.$$

Satz 1.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und einfach zusammenhänged. Dann sind für ein Vektorfeld $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *für* $i, j = 1, \ldots, n$.

(b) F *hat eine Stammfunktion.*

Beweis: Aus (a) folgt mit Satz 1.5 für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$

$$\int_\gamma F \cdot \vec{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich mit Satz 1.2 die Existenz einer Stammfunktion. Die umgekehrte Implikation wurde schon in Satz 1.3 festgestellt. □

Beispiel 1.8 Ein Spezialfall von Satz 1.6 ist das Lemma von Poincaré: ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ rotationsfrei, so besitzt F eine Stammfunktion φ. Tatsächlich kann diese explizit angegeben werden: Integration längs $\gamma_x(t) = (1-t)x_0 + tx$, $t \in [0,1]$, ergibt

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot \vec{dx} = \int_0^1 \langle F((1-t)x_0 + tx, x - x_0\rangle \, dt.$$

Wir fassen unsere Resultate über Kurvenintegrale in einer kleinen Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{ccc}
F \text{ Gradientenfeld} & \stackrel{\text{Satz 1.2}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ wegunabhängig} \\
\Downarrow \text{Satz 1.3} & \Uparrow \text{1-fach zshg. Satz 1.6} \Uparrow & \Downarrow \\
\partial_i F_j = \partial_j F_i & \stackrel{\text{Satz 1.5}}{\Longleftrightarrow} & \int F \cdot \vec{dx} \text{ homotopieinvariant}
\end{array}$$

Zu begründen ist noch die Implikation von rechts nach links in der unteren Zeile. Ist das Kurvenintegral homotopieinvariant, so ist es auf einer Umgebung $B_\varrho(x) \subset \Omega$ aber wegunabhängig. Also hat das Vektorfeld auf $B_\varrho(x)$ eine Stammfunktion, und es folgt $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ auf $B_\varrho(x)$.

Wir wollen zum Schluss des Abschnitts eine alternative Notation für Kurvenintegrale einführen, die auf lange Sicht das überlegene Konzept ist. Wir brauchen dazu den Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ aller Linearformen auf $\mathbb{R}^n$, mit anderen Worten den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$.

Definition 1.11 (1-Form) *Eine Abbildung $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ heißt Differentialform vom Grad Eins oder kurz 1-Form (oder auch Kovektorfeld) auf Ω.*

Für $f \in C^1(\Omega)$ ist die Ableitung df (die wir in diesem Kontext mit einem kleinen d statt einem großen D schreiben) eine 1-Form, das sogenannte Differential von f:

$$df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*, \; df(x)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) v_j.$$

Speziell bezeichnet man die Differentiale der n Koordinatenfunktionen $x \mapsto x_i$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Es gilt also

$$dx_i(x)v = v_i, \qquad \text{insbesondere } dx_i(x)e_j = \delta_{ij}.$$

Da $dx_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gleich ist, das heißt die Abbildung $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ ist konstant, wird die Variable x meistens weggelassen und stattdessen ein Punkt geschrieben, also $dx_i(x)v = dx_i \cdot v$. Jede 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat nun eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i \qquad \text{mit } \alpha_i : \Omega \to \mathbb{R},\ \alpha_i(x) = \alpha(x)e_i.$$

Dies folgt sofort, wenn wir an der Stelle $x \in \Omega$ beide Seiten auf die Basis $e_1, \ldots, e_n$ anwenden. Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind die Koordinatenfunktionen von α. Für das Differential einer Funktion gilt beispielweise

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Eine Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx_i$ auf Ω ist von der Klasse C^k, falls $\alpha_i \in C^k(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Definition 1.12 (Kurvenintegral von 1-Formen) *Sei α eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ setzen wir*

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Das Standardskalarprodukt erlaubt es, jedem Vektorfeld eine 1-Form bijektiv zuzuordnen, und zwar definiert man für das Vektorfeld $A : \Omega \to \mathbb{R}^n$ die 1-Form $\alpha : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ durch

$$\alpha(x)v = \langle A(x), v\rangle \qquad \text{für } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Dann haben A und α die gleichen Koordinatenfunktionen, denn es ist

$$\alpha_i(x) = \alpha(x)e_i = \langle A(x), e_i\rangle = A_i(x);$$

Insbesondere ist die Gleichung $A = \operatorname{grad}\varphi$ äquivalent zu $\alpha = d\varphi$. Etwas abstrakter ergibt sich das auch aus der Charakterisierung des Gradienten in Gleichung (3.5), Kapitel 6:

$$A = \operatorname{grad}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \langle A(x), v\rangle = d\varphi(x)v \ \text{ für alle } x \in \Omega,\ v \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = d\varphi.$$

Nach Definition von α gilt weiter $\alpha(\gamma(t))\gamma'(t) = \langle A(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$, und damit

$$\int_\gamma \alpha = \int_\gamma A \cdot \vec{dx}.$$

Es wird folgende Terminologie eingeführt.

Definition 1.13 *Eine 1-Form α auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt*

(a) *exakt, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt mit $\alpha = d\varphi$,*

(b) *geschlossen, wenn $\alpha \in C^1$ und $\partial_i \alpha_j = \partial_j \alpha_i$ auf Ω für $i, j = 1, \ldots, n$.*

Ist α dem Vektorfeld A zugeordnet, so ist demnach α genau dann exakt, wenn A ein Gradientenfeld ist, und genau dann geschlossen, wenn A rotationsfrei ist. Wir können somit alle unsere Resultate in der Sprache der 1-Formen neu forumulieren:

- genau dann ist α exakt, wenn das Kurvenintegral wegunabhängig ist;
- ist α exakt, so auch geschlossen;
- ist α geschlossen, so ist das Kurvenintegral homotopieinvariant;
- auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede geschlossene 1-Form exakt.

Der Vorteil der 1-Formen gegenüber den anschaulicheren Vektorfeldern liegt nun im Transformationsverhalten. Seien dazu $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, und $\phi \in C^1(U, V)$. Ist ω eine 1-Form auf V, so erhalten wir eine 1-Form $\phi^*\omega$ auf U, den pullback von ω unter ϕ, durch die Formel

$$(\phi^*\omega)(x)v = \omega(\phi(x))D\phi(x)v \quad \text{für } x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n.$$

Sind dy_i die Koordinatendifferentiale auf $\mathbb{R}^m$, so berechnen wir

$$(\phi^* dy_i)(x)v = dy_i \cdot D\phi(x)v = d\phi_i(x)v$$

beziehungsweise kurz $\phi^* dy_i = d\phi_i$ für $i = 1, \ldots, m$, und allgemeiner

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^m (\omega_i \circ \phi) d\phi_i \quad \text{mit} \quad d\phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Ist $\phi \in C^{k+1}$ und $\omega \in C^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so ist demnach $\phi^*\omega \in C^k$.

Satz 1.7 (Transformation des Kurvenintegrals) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\phi \in C^1(U, V)$. Für eine stetige 1-Form ω auf V und $\gamma \in PC^1([a, b], U)$ gilt*

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

Beweis: Aus den Definitionen ergibt sich

$$\int_{\phi\circ\gamma} \omega = \int_a^b \omega\big(\phi(\gamma(t))\big) D\phi(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (\phi^*\omega)(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \phi^*\omega.$$

□

Das Kurvenintegral von Vektorfeldern benutzt wesentlich das Skalarprodukt, was bei der Analyse des Transformationsverhaltens mit berücksichtigt werden müsste. Bei der Umrechnung des Laplaceoperators auf krummlinige Koordinaten wird uns so etwas noch begegnen.

2 Komplexe Analysis

In diesem Abschnitt wollen wir einen kurzen Ausflug in die komplexe Analysis – die sogenannte Funktionentheorie – unternehmen, und zwar wollen wir jetzt komplexe Kurvenintegrale betrachten. Im folgenden sei stets Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Definition 2.1 *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in \Omega$ mit Ableitung $f'(z) = c \in \mathbb{C}$, falls gilt:*

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = c.$$

f heißt komplex differenzierbar oder holomorph auf Ω, wenn f in allen $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist.

Formal ist diese Definition völlig analog zur Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion einer reellen Variablen, nur dass eben jetzt der Differenzenquotient in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}$ gebildet wird. Demzufolge gelten auch alle üblichen Differentiationsregeln:

- Differenzierbarkeit in $z \in \Omega$ impliziert Stetigkeit in $z \in \Omega$.
- Linearität der Ableitung: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Produktregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt $(fg)' = f'g + fg'$.
- Quotientenregel: für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $g \neq 0$ gilt $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Kettenregel: für offene $U, V \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ gilt $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Die Beweise sind weitgehend analog zu den reellen Beweisen und wir wollen aus Zeitgründen darauf verzichten. Wir halten nur fest, dass zum Beispiel Polynome $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ differenzierbar sind mit Ableitung $P'(z) = a_1 + \ldots + n a_n z^{n-1}$. Soweit verläuft die Diskussion der komplexen Differenzierbarkeit also ganz parallel zum reellen Fall.

Vergessen wir die komplexe Multiplikation, so ist $\mathbb{C}$ nichts anderes als der $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $1 = (1, 0)$ und $i = (0, 1)$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist dann eine vektorwertige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$, wobei

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) \quad \text{und} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Es stellt sich nun die Frage: in welcher Beziehung stehen die komplexe Differenzierbarkeit von f und die Differenzierbarkeit als reelle, vektorwertige Funktion?

Satz 2.1 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) *Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist auf Ω komplex differenzierbar.*

(b) *$f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ist (reell) differenzierbar mit $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.*

Beweis: Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl c ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, genauer gilt für $c = a + ib$ mit einer einfachen Rechnung

$$cz = Cz \quad \text{mit } C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Auf der linken Seite steht dabei das Produkt der komplexen Zahlen c und z, rechts die Anwendung der Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ auf den Vektor $z \in \mathbb{R}^2$. Ist f in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$, so folgt mit dieser Wahl von C

$$\frac{f(w) - f(z) - C(w-z)}{|w-z|} = \frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z}\,\frac{w-z}{|w-z|} \to 0,$$

also gilt $Df(z) = C$. Außerdem erhalten wir mit $f = u + iv$ im Punkt z die Gleichungen

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x = \frac{1}{2}\big(f_x - if_y\big). \tag{2.4}$$

Sei jetzt umgekehrt f reell differenzierbar in $z = (x,y)$, und die Cauchy-Riemann Gleichungen seien im Punkt z erfüllt. Dann gilt für $a = u_x$ und $b = -u_y$

$$Df(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also folgt mit $c = a + ib$ für $w \to z$

$$\frac{f(w) - f(z) - c(w-z)}{w-z} = \frac{f(w) - f(z) - Df(z)(w-z)}{|w-z|}\,\frac{|w-z|}{w-z} \to 0.$$

□

Die komplexe Differenzierbarkeit ist also stärker als die reelle Differenzierbarkeit der vektorwertigen Funktion, und zwar müssen die partiellen Ableitungen zusätzlich die Gleichungen $u_x = v_y$ sowie $u_y = -v_x$ erfüllen. Wir wollen als nächstes das komplexe Kurvenintegral definieren. Das Riemann-Integral einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion $f = u + iv : I \to \mathbb{C}$ ist wie üblich komponentenweise definiert, das heißt

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v \in \mathbb{C}.$$

Definition 2.2 (komplexes Kurvenintegral) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{C})$. Für $\gamma \in PC^1([a,b], \Omega)$ definieren wir*

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Im Integral rechts steht das Produkt der komplexen Zahlen $f(\gamma(t))$ und $\gamma'(t)$. Um das Integral in reelle Kurvenintegrale umzuformen, schreiben wir $f = u + iv$ mit $u, v \in C^0(\Omega)$ sowie $\gamma = x + iy$ mit $x, y \in PC^1(I)$ für $I = [a,b]$, und berechnen

$$\int_I (f\circ\gamma)\gamma' = \int_I \big((u+iv)\circ\gamma\big)\,(x' + iy') = \int_I \big((u\circ\gamma)x' - (v\circ\gamma)y'\big) + i\big((u\circ\gamma)y' + (v\circ\gamma)x'\big),$$

das heißt es gilt

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx). \tag{2.5}$$

Als Merkregel kann man hier $dz = dx + idy$ benutzen, die rechte Seite der Formel ergibt sich dann durch formales Ausmultiplizieren.

Beispiel 2.1 Sei γ der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis mit Radius $r > 0$ um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, das heißt genauer

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}.$$

Es gilt $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$. Wir berechnen nun für $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z - z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^k\,ire^{i\theta}\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \\ 2\pi i & \text{falls } k = -1. \end{cases}$$

Satz 2.2 (Cauchys Integralsatz) *Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, sei stetig partiell differenzierbar und holomorph. Ist dann $\gamma \in PC^1(I, \Omega)$ geschlossen homotop zu einer konstanten Kurve, so folgt*

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Beweis: Nach Satz 1.5 in diesem Kapitel müssen wir nur prüfen, ob die Differentialformen $u\,dx - v\,dy$ und $u\,dy + v\,dx$ geschlossen sind, das heißt ob gilt

$$u_y = -v_x \quad \text{und} \quad u_x = v_y.$$

Das sind aber genau die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

Etwas allgemeiner besagt Satz 1.5, dass das Kurvenintegral von $f(z)\,dz$, f holomorph, den gleichen Wert ergibt für zwei Kurven, die homotop mit festen Endpunkten oder geschlossen hoomotop sind. Tatsächlich kann auf die Stetigkeit der partiellen Ableitungen verzichtet werden, es reicht als Voraussetzung dass f holomorph ist. Diese Verschärfung ist für uns aber nicht relevant.

Definition 2.3 (komplexe Stammfunktion) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $F : \Omega \to \mathbb{C}$ (komplexe) Stammfunktion von f auf Ω, falls gilt:*

$$F'(z) = f(z) \quad \textit{für alle } z \in \Omega.$$

Im Gegensatz zur Situation bei Funktionen einer reellen Variablen, wo bekanntlich jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt, müssen für die Existenz einer komplexen Stammfunktion wieder Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein.

Folgerung 2.1 (Existenz komplexer Stammfunktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, $f = u + iv$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f besitzt auf Ω eine komplexe Stammfunktion.*

(b) *f ist komplex differenzierbar auf Ω.*

Beweis: Sei $F = U + iV$ Stammfunktion von f, also $u + iv = U_x - iU_y = V_y + iV_x$ nach (2.4). Es folgt $U, V \in C^2(\Omega)$ und

$$u_x - v_y = V_{yx} - V_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad u_y + v_x = U_{xy} - U_{yx} = 0.$$

Gelten umgekehrt die Cauchy-Riemann Gleichungen für f, so sind die 1-Formen $u\,dx - v\,dy$ sowie $u\,dy + v\,dx$ geschlossen, besitzen also Stammfunktionen $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$ nach Satz 1.6. Für U, V verifiziert man leicht die Cauchy-Riemann Gleichungen, also ist $F = U + iV$ komplex differenzierbar und mit (2.4) erhalten wir $F' = f$. $\square$

Im folgenden schreiben wir $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, und setzen

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \quad \text{für } \gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_r(z_0),\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Bekanntlich hängt das Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung von $\partial D_r(z_0)$ ab, solange der Kreis im positiven Sinn (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Der folgende Satz besagt unter anderem, dass eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe schon durch ihre Werte auf dem Rand der Kreisscheibe bestimmt ist. Für reell differenzierbare Funktionen ist das keineswegs so, zum Beispiel gibt es (viele) Funktionen $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(x) = 0$ für $|x| \geq 1$.

Satz 2.3 (Cauchy Integralformel) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ holomorph und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis: In $\Omega \backslash \{z\}$ ist der Kreis $\partial D_r(z_0)$ homotop zu $\partial D_\varepsilon(z)$, jeweils mit der mathematisch positiven Orientierung, falls $0 < \varepsilon < r - |z - z_0|$. Die Konstruktion der Homotopie sei den LeserInnen überlassen. Nun ist die Funktion $\zeta \mapsto f(\zeta)/(\zeta - z)$ auf $\Omega \backslash z$ komplex differenzierbar nach der Quotientenregel, und damit das Kurvenintegral homotopieinvariant nach (der nachfolgenden Bemerkung zu) Satz 2.2 Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
(\zeta = z + \varepsilon e^{it}) \quad &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it})\,dt.
\end{aligned}$$

Da f im Punkt z stetig ist, geht die rechte Seite gegen $f(z)$ mit $\varepsilon \to 0$. $\square$

Satz 2.4 (holomorph = analytisch) *Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$ komplex differenzierbar und $\overline{D_r(z_0)} \subset \Omega$. Dann gilt für alle $z \in D_r(z_0)$ die Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z - z_0)^k \quad \textit{mit } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,d\zeta.$$

Insbesondere ist f auf Ω unendlich oft komplex differenzierbar.

Beweis: Aus der Cauchyschen Integralformel, Satz 2.3, erhalten wir durch Entwicklung des Integranden in eine geometrische Reihe für $z \in D_r(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta.$$

Aus der Linearität des Kurvenintegrals folgt mit der Definition der a_k

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} (z - z_0)^k \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Das komplexe Kurvenintegral ist wie in Lemma 1.3 abgeschätzt durch Länge der Kurve mal Supremum des Integranden. Es folgt mit $M = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ für $|z - z_0| < r$

$$\begin{aligned} \Big| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k \Big| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^k \, d\zeta \Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \, 2\pi r \, \frac{M}{r} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^k \\ &= \frac{M}{1 - \frac{|z-z_0|}{r}} \Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^{n+1} \to 0 \quad \text{mit } n \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist die Potenzreihendarstellung bewiesen.

Sei nun allgemein $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine auf $D_r(z_0)$ konvergente Potenzreihe. Die Polynome $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ sind komplex differenzierbar, also gilt auf $D_r(z_0)$ nach Satz 2.1

$$Df_n = \begin{pmatrix} c_n & -d_n \\ d_n & c_n \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c_n + i d_n = f_n' = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1}$ konvergiert aber ebenfalls lokal gleichmäßig auf $D_r(z_0)$, siehe Lemma 3.1 in Kapitel 5. Da partielle Ableitungen eindimensionale Ableitungen sind, können wir die bekannte Vertauschbarkeit von Konvergenz und Ableitung, Satz 3.2 in Kapitel 5, hier anwenden und erhalten mit $n \to \infty$ auf $D_r(z_0)$

$$Df = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & a \end{pmatrix} \qquad \text{wobei } c + id = g.$$

Nach Satz 2.1 ist f also komplex differenzierbar mit $f' = g$. Durch Induktion ergibt sich, dass f auf $D_r(z_0)$ unendlich oft komplex differenzierbar ist. □

Wir sehen jetzt noch deutlicher, dass komplexe Differenzierbarkeit eine viel stärkere Bedingung darstellt als reelle Differenzierbarkeit. Die Existenz von Potenzreihendarstellungen ist sehr einschneidend, zum Beispiel ist eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Nullstellenmenge einen Häufungspunkt in Ω hat, automatisch die Nullfunktion. Dies folgt jetzt aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, siehe Satz 4.11 in Kapitel 2. Für reell differenzierbare Funktionen ist eine solche Aussage keineswegs wahr. Aus Zeitgründen müssen wir den Ausflug in die Funktionentheorie nun leider beenden.

Kapitel 9

Lokale Auflösung von Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wir interessieren uns für die Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = y$ zu gegebener rechter Seite $y \in \mathbb{R}^m$. Genauer wollen wir die lokale Lösbarkeit betrachten, das heißt wir setzen voraus, dass eine Lösung der Gleichung $f(x_0) = y_0$ gegeben ist, und stellen uns die folgenden Fragen:

(1) Hat die Gleichung $f(x) = y$ zu jedem y nahe bei y_0 eine Lösung x nahe bei x_0?

(2) Ist x_0 die einzige Lösung von $f(x) = y_0$ in einer Umgebung von x_0?

(3) Falls nicht, wie sieht die Lösungsmenge $f^{-1}\{y_0\}$ nahe bei x_0 aus?

Betrachten wir zunächst den Fall, dass f affin-linear ist. Wegen $f(x_0) = y_0$ hat f dann die Form $f(x) = y_0 + A(x - x_0)$ mit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) = y - y_0.$$

In diesem Fall liefert die Lineare Algebra sogar globale Antworten:

(1) Es gibt eine Lösung für alle $y \in \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = m$.

(2) Es gibt höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = n$.

(3) $f^{-1}\{y_0\} = x_0 + \ker A$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rang} A$.

Sei nun $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ beliebig, und $R_f(\xi) = f(x_0 + \xi) - \big(f(x_0) + Df(x_0)\xi\big)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ hinreichend klein. Ist $f(x_0) = y_0$, so folgt mit $A = Df(x_0)$

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad A(x - x_0) + R_f(x - x_0) = y - y_0.$$

Wir hoffen, dass sich der nichtlineare Term $R_f(x - x_0)$ als Störung der linearen Gleichung behandeln lässt, so dass sich die Aussagen (1), (2) und (3) geeignet übertragen lassen.

1 Diffeomorphismen

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt Diffeomorphismus der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} sind r-mal stetig differenzierbar.*

Beispiel 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Ist $f \in C^1(I)$ mit $f' > 0$ auf ganz I (bzw. $f' < 0$ auf ganz I), so ist $J := f(I)$ ein offenes Intervall und $f : I \to J$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dies ergibt sich aus Folgendem:

- $f : I \to J$ ist bijektiv, da streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz, genauer Satz 2.2 in Kapitel 3, ist J wieder ein offenes Intervall.
- Die Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ ist differenzierbar mit $g' = 1/(f' \circ g)$, insbesondere ist g von der Klasse C^1, vgl. Kapitel 4, Satz 1.6.

Umgekehrt: ist $f : I \to f(I)$ ein C^1-Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $g : f(I) \to I$, so ergibt die Kettenregel

$$g(f(x)) = x \quad \Rightarrow \quad g'(f(x))f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \neq 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gilt entweder $f' > 0$ auf ganz I oder $f' < 0$ auf ganz I. Insbesondere ist f streng monoton.

Zum Beispiel ist die Abbildung $f : (-1,1) \to (-1,1)$, $f(x) = x^3$, zwar bijektiv, genauer streng monoton wachsend, und von der Klasse C^1, aber sie ist kein C^1-Diffeomorphismus, denn es gilt $f'(0) = 0$. Die Umkehrabbildung

$$g : (-1,1) \to (-1,1),\ g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{für } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $y = 0$ nicht differenzierbar.

Beispiel 1.2 Sei $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \geq 0\}$. Die Polarkoordinatenabbildung

$$f : U \to V,\ f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$

ist ein Diffeomorphismus der Klasse C^∞. Prüden Sie nach, dass die Umkehrabbildung $g : V \to U$ wie folgt gegeben ist:

$$g(x,y) = \begin{cases} \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y \geq 0 \\ \big(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Die Funktion arccos ist unendlich oft differenzierbar auf dem Intervall $(-1,1)$, also ist g unendlich oft differenzierbar für $y \in V$, $y \neq 0$. Aber für $x < 0$ gilt alternativ die Formel

$$g(x,y) = \big(\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big).$$

Somit ist in der Tat $g \in C^\infty(V,U)$.

Beispiel 1.3 (Inversion) Die Inversion an der Standardsphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist der Diffeomorphismus

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Die Abbildung $f = f^{-1}$ ist von der Klasse C^∞. Die beschränkte Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$ wird auf die unbeschränkte Menge $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| > 1\}$ abgebildet.

Lemma 1.1 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $f : U \to V$ sei bijektiv mit Umkehrabbildung $g : V \to U$. Sind f in x_0 und g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so ist $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertierbar, insbesondere $m = n$, und es gilt $Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}$.*

Beweis: Aus $g\big(f(x)\big) = x$ und $f\big(g(y)\big) = y$ folgt mit der Kettenregel

$$Dg(y_0)Df(x_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad Df(x_0)Dg(y_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}.$$

Also ist $Df(x_0)$ injektiv und surjektiv, das heißt invertierbar, und die Dimensionsformel impliziert $m = n$. □

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Theoretisch hätten wir in unserer Definition 1.1 eines Diffeomorphismus $f : U \to V$ die Möglichkeit $m \neq n$ zulassen können. Lemma 1.1 zeigt, dass dies nichts gebracht hätte, denn es gilt automatisch $n = m$; man spricht von der Invarianz der Dimension unter Diffeomorphismen. Eine Bijektion $f : U \to V$ heißt Homeomorphismus, wenn f und f^{-1} beide stetig sind. Nach einem Satz von Brouwer (1910) gilt die Invarianz der Dimension, also $m = n$, schon für Homeomorphismen. Dies ist auf dem Hintergrund eines Beispiels von Peano (1890) zu sehen, der surjektive, stetige Abbildungen von einem Intervall auf die Fläche eines Quadrats konstruiert hat. Der Satz von Brouwer wird mit dem Konzept des Abbildungsgrads bewiesen, das in der algebraischen Topologie oder der nichtlinearen Funktionalanalysis eingeführt wird.

Bekanntlich heißt $\det Df(x_0)$ Jacobideterminante von f in x_0. In der Situation von Lemma 1.1 folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\det Dg(y_0) \det Df(x_0) = 1 \quad \text{für } y_0 = f(x_0). \tag{1.1}$$

Lemma 1.2 (Höhere Ableitungen der Umkehrfunktion) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ bijektiv. Ist $f \in C^r(U, V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist die Umkehrabbildung $g : V \to U$ differenzierbar, so ist auch $g \in C^r(V, U)$.*

Beweis: Nach Lemma 1.1 gilt $Dg = (Df)^{-1} \circ g$. Die Cramersche Regel für die Berechnung der inversen Matrix impliziert

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_i} = (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}\,(Df)}{\det(Df)} \circ g. \tag{1.2}$$

Dabei bezeichnet $M_{ij}(Df)$ die Determinante der Matrix, die aus Df durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $r \in \mathbb{N}$. Da g nach Voraussetzung differenzierbar und somit stetig ist, vgl. Satz 3.2 in Kapitel 6, ist für $f \in C^1$ die rechte Seite in (1.2) stetig als Produkt, Quotient und Verkettung stetiger Funktionen, und damit $g \in C^1$. Ist $f \in C^r$ und induktiv schon $g \in C^{r-1}$, so ist die rechte Seite von der Klasse C^{r-1} als Produkt, Quotient und Verkettung von C^{r-1}-Funktionen, siehe Folgerung 3.1 in Kapitel 6, und damit $g \in C^r$, was zu zeigen war. □

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun die Frage der Existenz einer Lösung angehen. Dazu die folgenden Definitionen.

Definition 1.2 *Eine Folge x_k, $k \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum (X,d) heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \text{für alle } k,l > N.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge x_k in X konvergiert, das heißt es gibt ein $x \in X$ mit $d(x, x_k) \to 0$ mit $k \to \infty$.

Natürlich ist $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Abstandsfunktion ein vollständiger metrischer Raum. Aber jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit dem euklidischen Abstand auch ein vollständiger metrischer Raum, denn eine Cauchyfolge $x_k \in A$ ist auch Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ und konvergiert damit gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $x \in A$ wegen A abgeschlossen.

Satz 1.1 (Fixpunktsatz von Banach) *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, und $F : X \to X$ eine Kontraktion, das heißt es gibt ein $\theta \in [0,1)$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in X. \tag{1.3}$$

Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar, denn aus $F(x) = x$ und $F(y) = y$ folgt

$$d(x,y) = d(F(x), F(y)) \leq \theta\, d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0, \text{ also } x = y.$$

Um den Fixpunkt zu konstruieren, betrachten wir die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = F(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$. Es folgt aus (1.3) für $n \geq 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \theta\, d(x_n, x_{n-1}). \tag{1.4}$$

Wir können uns einen müder werdenden Frosch vorstellen, dessen Sprünge jedes Mal um ein Faktor $\theta \in [0,1)$ kürzer werden. Wie weit kann der Frosch insgesamt kommen? Es folgt per Induktion aus (1.4)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n\, d(x_1, x_0) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

und hieraus weiter mit der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_0) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j\, d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Indem wir x_n statt x_0 als Startwert auffassen, haben wir für $m > n$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-\theta}\, d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0). \tag{1.6}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge, und konvergiert nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Da F nach Voraussetzung Lipschitzstetig ist (mit Konstante θ), folgt

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

und die Existenz des Fixpunkts ist gezeigt. □

Wir bemerken, dass wir a priori abschätzen können, wie weit die Iteration im n-ten Schritt noch vom gesuchten Fixpunkt entfernt ist, und zwar folgt mit $m \to \infty$ aus (1.6)

$$d(x, x_n) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\, d(x_1, x_0).$$

Satz 1.2 (über inverse Funktionen) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. *Ist* $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *invertierbar, so gibt es eine offene Umgebung* U *von* x_0, *so dass gilt:*

(a) $V = f(U)$ *ist offene Umgebung von* $y_0 = f(x_0)$

(b) $f : U \to V$ *ist Diffeomorphismus der Klasse* C^1.

Zusatz. Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g = (f|_U)^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir können $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ annehmen, andernfalls betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : x_0 + \xi \in \Omega\} \to \mathbb{R}^n,\ \tilde{f}(\xi) = f(x_0 + \xi) - f(x_0).$$

Schritt 1 *Formulierung als Fixpunktproblem*
Mit $A := Df(0)$ und $R_f(x) := f(x) - Ax$ können wir die Gleichung wie folgt umformen:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad Ax + R_f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big).$$

Für $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir also $\phi_y : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\phi_y(x) = A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)$, und erhalten

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \phi_y(x) = x. \tag{1.7}$$

Schritt 2 *Konstruktion der Lösung*
Wir bestimmen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, so dass für jedes $y \in B_\varepsilon(0)$ die Abbildung $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine Kontraktion ist. Setze $\Lambda = \|A^{-1}\| \in (0, \infty)$. Nach Voraussetzung ist $DR_f(x) = Df(x) - A$ stetig mit $DR_f(0) = 0$, folglich gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\overline{B_{\delta_0}(0)} \subset \Omega \quad \text{und} \quad \|DR_f(x)\| \leq \frac{1}{2\Lambda} \quad \text{für } |x| \leq \delta_0.$$

Aus dem Schrankensatz, siehe Satz 1.2 in Kapitel 7, folgt

$$|x_1|, |x_2| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |R_f(x_1) - R_f(x_2)| \leq \frac{1}{2\Lambda}\,|x_1 - x_2|. \tag{1.8}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x_1)\big) - A^{-1}\big(y - R_f(x_2)\big)\big| \\
&= \big|A^{-1}\big(R_f(x_1) - R_f(x_2)\big)\big| \\
&\leq \Lambda\,|R_f(x_1) - R_f(x_2)|.
\end{aligned}$$

Also folgt aus (1.8) die Kontraktionseigenschaft

$$|x_1|, |x_2| \leq \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|. \tag{1.9}$$

Bisher ist $y \in \mathbb{R}^n$ noch beliebig. Wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned}
|\phi_y(x)| &= \big|A^{-1}\big(y - R_f(x)\big)\big| \\
&\leq \|A^{-1}\|\,\big(|y| + |R_f(x)|\big) \\
&= \Lambda\big(|y| + |R_f(x) - R_f(0)|\big) \quad \big(\text{ da } R_f(0) = 0\big) \\
&\leq \Lambda|y| + \frac{1}{2}|x| \quad \text{für } |x| \leq \delta_0 \text{ nach (1.8).}
\end{aligned}$$

Also folgt für $\delta \in (0,\delta_0]$, wenn wir $\varepsilon = \delta/(2\Lambda) > 0$ wählen,

$$(1.10) \qquad |x| \leq \delta,\, |y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\phi_y(x)| < \Lambda\varepsilon + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Wegen (1.10) und (1.9) ist $\phi_y : \overline{B_\delta(0)} \to \overline{B_\delta(0)}$ eine wohldefinierte Kontraktion mit Konstante $\theta = 1/2$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es zu jedem $y \in B_\varepsilon(0)$ genau ein $x \in \overline{B_\delta(0)}$ mit $\phi_y(x) = x$, das heißt $f(x) = y$ nach (1.7). Tatsächlich ist $x \in B_\delta(0)$, denn nach (1.10) gilt $|x| = |\phi_y(x)| < \delta$. Die Mengen $V = B_\varepsilon(0)$ und $U = f^{-1}(V) \cap B_\delta(0)$ sind offene Umgebungen des Nullpunkts, siehe Satz 1.4 in Kapitel 6 für die Offenheit von U, und wie gezeigt ist $f : U \to V$ bijektiv. Insbesondere ist Behauptung (a) bewiesen.

Schritt 3 *Differenzierbarkeit der inversen Abbildung*
Sei $g : V \to U$ die Umkehrabbildung von $f : U \to V$. Dann gilt

$$(1.11) \qquad |g(y)| = |\phi_y(g(y))| \leq \Lambda|y| + \frac{1}{2}\,|g(y)| \quad \Rightarrow \quad |g(y)| \leq 2\Lambda|y|.$$

Insbesondere ist g stetig im Nullpunkt mit $g(0) = 0$. Wir zeigen nun $Dg(0) = A^{-1}$. Für $y \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ und es gilt die Abschätzung

$$\frac{|g(y) - A^{-1}\,y|}{|y|} = \frac{|\phi_y\big(g(y)\big) - A^{-1}y|}{|y|} = \frac{\big|A^{-1}\big(R_f\big(g(y)\big)\big)\big|}{|y|} \leq \Lambda\,\frac{\big|R_f\big(g(y)\big)\big|}{|g(y)|}\,\frac{|g(y)|}{|y|}.$$

Mit $y \to 0$ geht die rechte Seite aber gegen Null, denn $|g(y)|/|y| \leq 2\Lambda$ nach (1.11) und $|R_f(x)|/|x| \to 0$ mit $x = g(y) \to 0$. Damit ist ist $Dg(0) = A^{-1}$ gezeigt. Um die Differenzierbarkeit für alle $y \in V$ zu bekommen, wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in B_\delta(0)$. Ist dann $y \in V$, so sind die Voraussetzungen des Satzes im Punkt $x = g(y)$ erfüllt, und es folgt aus dem Bewiesenen $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Lemma 1.2 liefert schließlich $g \in C^1(V,U)$. Ist $f \in C^r(U,V)$ für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist $g \in C^r(V,U)$, ebenfalls nach Lemma 1.2. $\square$

Als unmittelbare Konsequenz des Satzes halten wir fest:

Folgerung 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Ist $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, so ist $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweis: Nach Satz 1.2 hat jeder Punkt $y \in f(\Omega)$ eine offene Umgebung $V \subset f(\Omega)$. $\square$

Beispiel 1.4 Wie wir in Beispiel 1.1 gesehen haben, bildet eine eindimensionale Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $f' \neq 0$ das gesamte Definitionsintervall diffeomorph auf das Bildintervall ab, das heißt es gilt eine globale Version des Umkehrsatzes. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Funktionen mehrerer Variabler im allgemeinen nicht wahr ist. In reellen Koordinaten $z = x + iy$ lautet die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \exp(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Die Jacobideterminante von exp ist nirgends Null, genauer gilt

$$D\exp(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\exp(x,y) = e^{2x} \neq 0.$$

Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, denn es ist $\exp(x,y+2k\pi) = \exp(x,y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir diskutieren jetzt ein Beispiel, das unter anderem beim Übergang von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion in der klassischen Mechanik auftritt. Für eine differenzierbare Funktion $L : U \to \mathbb{R}$ definiert man die zugehörige Gradientenabbildung durch

$$f : U \to V,\ f(x) = DL(x) \quad \text{wobei } V = f(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ist $f : U \to V$ injektiv und $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von f, so können wir die Legendretransformierte oder duale Funktion von L wie folgt erklären:

$$H : V \to \mathbb{R},\ H(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - L(x)\Big)|_{x=g(y)}.$$

Für $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(x) = \sqrt{1+|x|^2}$ berechnet man zum Beispiel $V = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ und

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-|y|^2}} \quad \text{sowie}$$

$$H(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sqrt{1+|x|^2}\Big)|_{x=g(y)} = \sqrt{1-|y|^2}.$$

Satz 1.3 (Involutionseigenschaft der Legendretransformation) *Sei für $L \in C^2(U)$ die Gradientenabbildung $f : U \to V$, $f(x) = DL(x)$, diffeomorph, und sei H die Legendretransformierte von L. Dann folgt $DH = g$ mit $g = f^{-1} \in C^1(V,U)$, insbesondere $H \in C^2(V)$, und die Legendretransformierte von H ist wieder L:*

$$L(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - H(y)\Big)|_{y=f(x)} \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis: Wir berechnen unter Verwendung von $\frac{\partial L}{\partial x_i}(g(y)) = f_i(g(y)) = y_i$

$$\frac{\partial H}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i g_i(y) - L \circ g\Big) = g_j + \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ g\, \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = g_j,$$

also gilt $DH = g$. Die Darstellung von L folgt mit $y = f(x)$ in der Definition von H. □

Geometrisch gelangen wir zu der Legendretransformation, wenn wir für den Graph einer Funktion L die Schar $\{E_x : x \in U\}$ der affinen Tangentialebenen betrachten:

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = L(x) + DL(x)(\xi - x)\} \quad \text{für } x \in U.$$

Wir wollen diese Schar durch die Steigungen $y = DL(x)$ parametrisieren; natürlich muss dazu die Gradientenabbildung injektiv sein. Die Legendretransformierte $H : V \to \mathbb{R}$ von L ist dann definiert, und es folgt

$$E_x = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^{n} y_i \xi_i - H(y)\} \quad \text{für } y = DL(x).$$

Umgekehrt kann das Problem betrachtet werden, zu einer gegebenen Ebenenschar $E_y = \{(\xi, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : z = \sum_{i=1}^n y_i \xi_i - H(y)\}$ einen Graphen $L : U \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, dessen affine Tangentialebenen gerade die E_y sind. Es muss dann H die Legendretransformierte der gesuchten Funktion L sein, und unter den Annahmen von Satz 1.3 kann L wiederum durch Legendretransformation von H bestimmt werden.

Satz 1.4 (Youngsche Ungleichung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $L \in C^2(U)$ mit $D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Dann ist die Legendretransformierte $H \in C^2(V)$ definiert, wobei $V = DL(U)$, und es gilt*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq L(x) + H(y) \qquad \text{für alle } x \in U,\, y \in V.$$

Gleichheit tritt ein genau für $y = DL(x)$ beziehungsweise äquivalent $x = DH(y)$.

Beweis: Die Gradientenabbildung $f \in C^1(U,V)$, $f(x) = DL(x)$, ist injektiv, denn wegen $Df(x) = D^2L(x) > 0$ folgt für $x_0, x_1 \in U$ mit $x_0 \neq x_1$

$$\langle f(x_1) - f(x_0), x_1 - x_0 \rangle = \int_0^1 \langle Df((1-t)x_1 + tx_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0 \rangle\, dt > 0.$$

Da außerdem $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$, ist f ein C^1-Diffeomorphismus nach dem Umkehrsatz. Betrachte nun für festes $y \in V$ die Funktion $\varphi \in C^2(U)$ mit

$$\varphi(x) = L(x) + H(y) - \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Dann gilt $\varphi(g(y)) = 0$ nach Definition von H sowie $D\varphi(g(y)) = DL(g(y)) - y = 0$ nach Definition von $g = f^{-1}$, und $D^2\varphi(x) = D^2L(x) > 0$ für alle $x \in U$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 2.4 in Kapitel 7. □

Aus dem Satz folgt für die Legendretransformierte die Darstellung

$$H(y) = \inf_{x \in U} \Big(\sum_{i=1}^n y_i x_i - L(x) \Big).$$

Mit dieser Formel kann die Legendretransformierte auch dann definiert werden, wenn L nicht differenzierbar, sondern lediglich konvex ist.

2 Implizite Funktionen

Wir betrachten jetzt den Fall eines unterbestimmten Systems, wenn es also weniger Gleichungen gibt als Unbekannte. Wir können die Funktion dann wie folgt schreiben, indem wir die Variablen in zwei Gruppen einteilen:

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^k, \quad f = f(x,y), \quad \text{wobei } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n.$$

Gegeben sei eine Lösung (x_0, y_0) der Gleichung $f(x,y) = z_0$. Wir interessieren uns dafür, wie die Lösungsmenge dieser Gleichung nahe bei (x_0, y_0) aussieht. Können wir nach y auflösen, d. h. die Lösungsmenge als Graph einer Funktion $y = g(x)$ darstellen?

Beispiel 2.1 Betrachte die Gleichung

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1 \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Sei eine Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, also ein Punkt auf dem Einheitskreis. Ist $y_0 > 0$, so ist die Lösungsmenge nahe bei (x_0, y_0) Graph der Funktion $y = \sqrt{1-x^2}$. Analog haben wir im Fall $y_0 < 0$ die lokale Graphendarstellung $y = -\sqrt{1-x^2}$. Dagegen ist die Lösungsmenge in keiner Umgebung von $(1,0)$ (und ebenso in keiner Umgebung von $(-1,0)$) als Graph über der x-Achse darstellbar, denn es gibt die zwei Lösungen $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Es kann auch vorkommen, dass (x_0, y_0) der einzige Punkt mit $f(x_0, y_0) = z_0$ ist, z.B. löst nur der Nullpunkt die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 2.2 *Sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ linear. Wir unterteilen die $k \times (m+k)$-Matrix von f in eine $k \times m$-Matrix A und eine $k \times k$-Matrix B, d. h.*

$$f(x,y) = Ax + By \quad \textit{mit } A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), \quad B \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k).$$

Die Gleichung $Ax+By = z_0$ hat zu festem $x \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Auflösung nach y dann und nur dann, wenn B invertierbar ist. Ist das der Fall, so lautet die Auflösung $y = B^{-1}(z_0 - Ax)$.

Allgemein schreiben wir die Jacobimatrix von $f = f(x,y)$ in der Form

$$Df(x,y) = (D_x f,\, D_y f) \in (\mathbb{R}^{k\times m},\, \mathbb{R}^{k\times k}).$$

Wenn wir nach $y = g(x)$ auflösen wollen, so sollte nach Beispiel 2.2 die Ableitung $D_y f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertierbar sein. In den Anwendungen ist die Einteilung in die beiden Variablengruppen nicht immer vorgegeben, das heißt es könnte nach verschiedenen Gruppen von je k Variablen aufgelöst werden. So kann der Einheitskreis in einer Umgebung von $(1,0)$ zwar nicht als Graph $y = g(x)$ geschrieben werden, wohl aber als Graph $x = g(y)$, und außer in den vier Punkten $\pm e_1, \pm e_2$ könnte sowohl nach x als auch nach y aufgelöst werden.

Merkregel. Die Ableitung nach den Variablen, nach denen aufgelöst werden soll, muss invertierbar sein. Im Spezialfall $k = 1$ bedeutet das $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Satz 2.1 (über implizite Funktionen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Ist $f(x_0, y_0) = z_0$ und $D_y f(x_0, y_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen U von x_0 bzw. V von y_0 sowie eine Funktion $g \in C^1(U, V)$ mit*

$$\{(x,y) \in U \times V : f(x,y) = z_0\} = \{\big(x, g(x)\big) : x \in U\}, \tag{2.12}$$

insbesondere ist $g(x_0) = y_0$. Die Funktion g hat die Ableitung

$$Dg(x_0) = -\big(D_y f(x_0, y_0)\big)^{-1} D_x f(x_0, y_0). \tag{2.13}$$

Zusatz. Für jedes $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gilt die Implikation

$$f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k) \quad \Rightarrow \quad g \in C^r(U, \mathbb{R}^k).$$

Beweis: Wir verwenden einen Trick, um den Satz über inverse Funktionen anwenden zu können, und zwar betrachten wir $F : \Omega \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, $F(x,y) = \big(x, f(x,y)\big)$. Es gilt

$$DF = \begin{pmatrix} \mathrm{E}_m & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{m\times m} & \mathbb{R}^{m\times k} \\ \mathbb{R}^{k\times m} & \mathbb{R}^{k\times k} \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\det DF(x_0, y_0) = \det D_y f(x_0, y_0) \neq 0$ nach Voraussetzung. Nach dem Umkehrsatz existieren offene Umgebungen $U_0 \times V$ von (x_0, y_0) sowie W von (x_0, z_0), so dass $F : U_0 \times V \to W$ diffeomorph ist. Wir bezeichnen die zugehörige Umkehrabbildung mit $G \in C^1(W, U_0 \times V)$. Ist $(x,z) \in W$, also $(x,z) = (x, f(x,y))$ mit $(x,y) \in U_0 \times V$ nach Konstruktion, so folgt

$$G(x,z) = G(x, f(x,y) = G(F(x,y)) = (x,y).$$

Also ist G von der Form $G(x,z) = (x, g_0(x,z))$ mit $g_0 \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$. Sei nun $U = \{x \in U_0 : (x, z_0) \in W\}$. Da W offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, ist U offen in $\mathbb{R}^m$ und für $(x,y) \in U \times V$ gilt

$$\begin{array}{rrcll} f(x,y) = z_0 & \Leftrightarrow \quad F(x,y) & = & (x, z_0) & \\ & \Leftrightarrow \quad (x,y) & = & G(x, z_0) & (\text{da } (x,z_0) \in W) \\ & \Leftrightarrow \quad y & = & g_0(x, z_0). & \end{array}$$

Also gilt die Aussage des Satzes mit $g(x) = g(x, z_0)$. Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel:

$$f\big(x, g(x)\big) = z_0 \quad \Rightarrow \quad D_x f(x_0, y_0) + D_y f(x_0, y_0)\, Dg(x_0) = 0.$$

$\square$

Beispiel 2.3 Wir wollen als triviales Beispiel untersuchen, wie die Nullstelle eines quadratischen Polynoms von seinen Koeffizienten abhängt. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(p,q,\lambda) = \lambda^2 + 2p\,\lambda + q = (\lambda + p)^2 - (p^2 - q).$$

Die Menge $N = \{(p,q,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : f(p,q,\lambda) = 0\}$ ist die Vereinigung der beiden disjunkten Graphen $G^{\pm} = \{(p, q, \lambda^{\pm}(p,q)) : p^2 > q\}$, wobei $\lambda^{\pm}(p,q) = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$, mit der Menge $\overline{G}^+ \cap \overline{G}^- = \{(p,q,\lambda) : p^2 = q,\ \lambda = -p\}$. Im Fall

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 > 0$$

liegt (p_0, q_0, λ_0) in einem der beiden Graphen G^+ oder G^-, und N ist in einer Umgebung $U \times V$ als Graph von λ^+ oder λ^- darstellbar. Ist dagegen

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(p_0, q_0, \lambda_0) = 2(\lambda_0 + p_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_0^2 - q_0 = 0,$$

so macht der implizite Funktionensatz keine Aussage. Tatsächlich lässt sich die Menge N in keiner Umgebung von (p_0, q_0, λ_0) als Graph $\lambda = \lambda(p,q)$ darstellen: für $p^2 < q$ hat die Gleichung überhaupt keine Lösung, für $p^2 = q$ genau eine und für $p^2 > q$ die zwei verschiedenen Lösungen $\lambda^{\pm}(p,q)$.

Beispiel 2.4 Betrachte jetzt $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(b, \lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0$. Sei λ_0 eine einfache Nullstelle von $f(a, \lambda)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ fest, das heißt es gilt

$$f(a,\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda) \quad \text{ für ein Polynom } q(\lambda) \text{ mit } q(\lambda_0) \neq 0.$$

Es folgt $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0) = q(\lambda_0) \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Umgebung $U \times V$ von (a, λ_0), so dass zu jedem $b \in U$ genau eine Nullstelle $\lambda(b) \in V$ von $f(b, \cdot\,)$ existiert. Diese hängt unendlich oft differenzierbar von b ab, und es gilt für $0 \leq i \leq n-1$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial b_i}(a) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(a, \lambda_0)\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial b_i}(a, \lambda_0) = -\frac{\lambda_0^i}{n\,\lambda_0^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, \lambda_0^{n-2} + \ldots + a_1}.$$

Wir kommen nun zu einer geometrischen Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ und $z_0 \in \mathbb{R}$, so kann im allgemeinen die Niveaumenge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = z_0\}$$

Punkte enthalten, in denen M nicht lokal wie eine Linie aussieht, z.B. Kreuzungspunkte von Linien oder isolierte Punkte. Ist aber $Df(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in M$, so ist M nach dem impliziten Funktionensatz in der Nähe jedes Punkts als C^1-Graph über der x-Achse oder der y-Achse darstellbar und damit wirklich eine Höhenlinie im strengen Sinn des Worts. Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die lokal aussehen wie ein Unterraum, heißen Untermannigfaltigkeiten; vergleiche hierzu auch die Diskussion des Tangentialraums von differenzierbaren Graphen mittels Blowup, siehe Kapitel 6 Abschnitt 3.

Definition 2.1 *Sei $1 \leq m \leq n$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heisst m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^r, wobei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls gilt: zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^r-Diffeomorphismus $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ mit*

$$\phi(M \cap \Omega) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \phi(\Omega).$$

Wir nennen den Diffeomorphismus ϕ eine (lokale) Plättung von M. Im Einzelfall kann der Nachweis, dass eine gegebene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit ist, anhand der Definition mühevoll sein. Für Mengen, die als Niveaumengen einer Funktion gegeben sind, liefert jedoch der Satz über implizite Funktionen folgendes Kriterium.

Satz 2.2 (Untermannigfaltigkeitskriterien) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $m + k = n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *M ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^r.*

(2) Niveaumengenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, so dass $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ und $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω.*

(3) Graphenkriterium: *Zu $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ und $g \in C^r(U,V)$, so dass nach geeigneter Permutation der Koordinaten gilt:*

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Beweis: Wir zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Es gelte (1), das heißt zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Plättung $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ der Klasse C^r mit $p \in \Omega$. Sei $\pi^\perp : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann folgt mit $f = \pi^\perp \circ \phi$ für $q \in \Omega$

$$f(q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(q) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad q \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = M \cap \Omega.$$

Außerdem gilt $\operatorname{rang} Df = \operatorname{rang} \big(\pi^\perp \circ D\phi\big) = k$ und $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Ist (2) erfüllt, so ist nach evtl. Permutation der Koordinaten $D_y f(p)$ invertierbar, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, und (3) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

Für (3) $\Rightarrow$ (1) können wir annehmen, dass die Graphendarstellung ohne Permuation der Koordinaten gilt. Wir setzen $\Omega = U \times V$ und

$$\phi : \Omega \to \phi(\Omega),\ \phi(x,y) = \big(x, y - g(x)\big).$$

Dann ist $\phi \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^n)$ injektiv und es gilt

$$D\phi(x,y) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -Dg(x) & E_k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det D\phi(x,y) = 1 \quad \text{für alle } (x,y) \in \Omega.$$

Also ist $\phi : \Omega \to \phi(\Omega)$ ein Diffeomorphismus der Klasse C^r nach dem Umkehrsatz. Da $(x,y) \in M \cap \Omega$ genau wenn $y = g(x)$, also $\phi(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, ist die in (1) verlangte lokale Plättung gefunden. $\square$

Beispiel 2.5 Die Sphäre $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1\}$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{m+1}$ der Klasse C^∞. Denn es gilt

$$\mathbb{S}^m = f^{-1}(0) \text{ für } f : \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^2 - 1,$$

und $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$. Die Behauptung folgt also aus Satz 2.2.

Definition 2.2 *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heisst Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^n$ m Punkt $p \in M$, falls es eine Abbildung $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Die Menge der Tangentialvektoren von M im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet.*

Folgerung 2.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und $n = m+k$. Ist $p \in M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ für eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ mit $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω, so gilt*

$$T_pM = \ker Df(p).$$

Insbesondere ist T_pM ein m-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Für $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = w$ gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)|_{t=0} = Df\big(\gamma(0)\big)\gamma'(0) = Df(p)\,w \quad \Rightarrow \quad T_pM \subset \ker Df(p).$$

Nach Satz 2.2 gibt es andererseits, nach eventueller Permutation der Koordinaten, offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^k$ mit $p \in U \times V$, sowie $g \in C^1(U,V)$ mit

$$M \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) : x \in U\}.$$

Die Graphenabbildung $G \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $G(x) = (x, g(x))$, bildet nach M ab. Schreiben wir $p = (x_0, g(x_0))$ für geeignetes $x_0 \in U$, so folgt für alle $v \in \mathbb{R}^m$

$$DG(x_0)v = \frac{d}{dt} G(x_0 + tv)|_{t=0} \in T_pM \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM.$$

Zusammenfassend ist $\operatorname{Bild} DG(x_0) \subset T_pM \subset \ker Df(p)$. Aber $DG(x_0)$ ist injektiv, denn $DG(x_0)v = (v, Dg(x_0)v)$, und wegen $\operatorname{rang} Df(p) = k$ folgt mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Bild} DG(x_0) = m = n - \operatorname{rang} Df(p) = \dim \ker Df(p).$$

Also gilt $\operatorname{Bild} DG(x_0) = \ker Df(p) = T_pM$. $\square$

Die Folgerung zeigt, dass der Tangentialraum einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit tatsächlich ein m-dimensionaler Vektorraum ist. Dies zeigt, dass die Dimension einer C^1-Untermannigfaltigkeit wohldefiniert ist, das heißt es kann nicht Plättungen mit verschiedenen Dimensionen von M geben. Auf die Idee wäre vermutlich auch kaum jemand gekommen. Wir kommen nun zur sogenannten Lagrange-Multiplikatorenregel.

Folgerung 2.2 (Extrema mit Nebenbedingungen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ und $\varphi \in C^1(\Omega)$. Gilt dann für ein $p \in f^{-1}(0)$*

(1) *$\varphi(q) \geq \varphi(p)$ für alle $q \in \Omega$ mit $f(q) = 0$,*

(2) *$\operatorname{rang} Df(p) = k$,*

so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(p) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \operatorname{grad} f_i(p)$.

Beweis: Nach eventueller Verkleinerung von Ω ist $\operatorname{rang} Df = k$ auf Ω und $M := f^{-1}(0)$ ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wobei $m = n - k$. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$, so hat hat $\varphi \circ \gamma$ in $t = 0$ ein lokales Minimum und folglich

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi\big(\gamma(t)\big)|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} \varphi(p), v \rangle,$$

das heißt $\operatorname{grad} \varphi(p) \in (T_pM)^\perp$. Da $f_j|_M \equiv 0$, gilt analog $\operatorname{grad} f_j(p) \in (T_pM)^\perp$ für $1 \leq j \leq k$. Aber $\dim (T_pM)^\perp = k$ nach Folgerung 2.1, und die Vektoren $\operatorname{grad} f_j(p)$ sind die Zeilenvektoren der Matrix $Df(p)$ mit Rang k. Wegen der Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang ist $\{\operatorname{grad} f_j(p) : 1 \leq j \leq k\}$ eine Basis von $(T_pM)^\perp$, und die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel 2.6 Für eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir hier nochmals das Problem, die quadratische Form $\varphi(x) = \langle Bx, x \rangle$ zu minimieren unter der Nebenbedingung $f(x) = |x|^2 - 1 = 0$. Da $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(0)$ kompakt und φ stetig, wird das Infimum in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ angenommen. Nach Folgerung 2.2 gibt es dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \lambda \operatorname{grad} f(x_0)$, also $Bx_0 = \lambda x_0$. Somit hat jede symmetrische Matrix B mindestens einen Eigenvektor, vergleiche Kapitel 7, Satz 2.3.

Wir haben die Sätze über inverse und implizite Funktionen im Endlichdimensionalen formuliert, damit das Wesentliche nicht durch zuviel Abstraktion verdeckt wird. An der Verallgemeinerung auf Abbildungen zwischen Banachräumen besteht aber großes Interesse: in den Anwendungen ist die Gleichung $f(x) = y$ zum Beispiel eine Differential- oder Integralgleichung, die durch eine gesuchte Funktion x in einem geeigneten Funktionenraum X gelöst werden soll. Eine Inspektion des Beweises des Umkehrsatzes ergibt, dass die Konstruktion der inversen Abbildung einschließlich ihrer Differenzierbarkeit ohne wesentliche Änderungen auch dann richtig ist, wenn f eine offene Teilmenge des Banachraums X in den Banachraum Y abbildet. Dabei muss die euklidische Norm von A durch die Operatornorm $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ ersetzt werden, und der Raum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muss ersetzt werden durch

$$L(X, Y) = \{A : X \to Y | \, A \text{ linear }, \|A\| < \infty\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Bedingung $\|A\| < \infty$ äquivalent dazu ist, dass die lineare Abbildung A stetig ist. Dies ist eine *conditio sine qua non*, darum nehmen wir sie in die Definition von $L(X, Y)$ auf. Insbesondere wird in der Definition der Differenzierbarkeit verlangt, dass $Df(x_0) \in L(X, Y)$.

Expliziten Gebrauch von den Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ haben wir nur gemacht, um die höhere Differenzierbarkeit der Inversen g zu etablieren. Im Unendlichdimenensionalen wird dazu alternativ die sogenannte Neumannsche Reihe benutzt.

Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Existenz und Eindeutigkeit für das Anfangswertproblem

Aus Zeitgründen müssen wir uns hier auf einen zentralen Aspekt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beschränken, nämlich die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertaufgaben. Als Einstieg betrachten wir das Problem, die zeitliche Entwicklung einer Population (Bakterien, Bevölkerung, Kontostand, Atome, ...) vorherzusagen oder rückwärtig zu bestimmen. Wir interessieren uns also für die Größe $x(t)$ der Population innerhalb eines gewissen Zeitintervalls I. Dabei ist zur Zeit $t_0 \in I$ ein Wert $x(t_0) = x_0$ gegeben. Wir sprechen von einem Anfangswertproblem, auch wenn t_0 nicht der linke Endpunkt von I ist. Je nach Kontext sind viele verschiedene Wachstumsgesetze denkbar:

Beim natürlichen Wachstum (Kontostand, radioaktiver Zerfall) ist die Wachstums- oder Zerfallsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen Menge, mit fester Zuwachs- bzw. Zerfallsrate $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x' = \alpha x.$$

Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems ist $x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$. Dabei ergibt sich die Eindeutigkeit wie folgt: ist $x : I \to \mathbb{R}$ beliebige Lösung der Differentialgleichung, so gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\alpha t} x(t)\Big) = e^{-\alpha t}\left(x'(t) - \alpha x(t)\right) = 0,$$

also $x(t) = c\, e^{\alpha t}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung folgt weiter $x_0 = c e^{\alpha t_0}$ wie behauptet. Das sogenannte logistische Wachstum ist das Vermehrungsgesetz

$$x' = (\alpha - \beta x)x = \alpha x - \beta x^2 \quad \text{ mit } \alpha, \beta > 0.$$

Als Motivation für den Zusatzterm $-\beta x$ kann das Beispiel einer Schafherde dienen, für die nur eine feste Weidefläche zur Verfügung steht. Ab einem gewissen Schwellenwert sollte die Zahl der Tiere dann wieder abnehmen. Im Fall $x_0 = x(t_0) > 0$ ist eine Lösung für $t \geq t_0$ durch folgende Formel gegeben, wobei die Eindeutigkeit schon weniger offensichtlich ist:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha(t-t_0)}}.$$

Für $t \to \infty$ konvergiert die Lösung gegen α/β. Das sogenannte Räuber-Beute Modell von Volterra und Lotka betrachtet zwei Populationen $x(t) =$ und $y(t)$, zum Beispiel Gänse und Füchse. Bei zuviel Füchsen wird die Vermehrungsrate der Gänse negativ, bei zuwenig Gänsen ist die Vermehrungsrate der Füchse negativ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind positive Konstanten):

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha - \beta y)x \\ y' &= (-\gamma + \delta x)y. \end{aligned}$$

Es ergeben sich also zwei gekoppelte Gleichungen, deren Lösung nicht ohne weiteres ermittelt werden kann. Soll das Modell außerdem die jahreszeitliche Änderung der Futtersituation berücksichtigen, so müssen die Koeffizienten durch zeitabhängige Funktionen ersetzt werden. Allgemein interessieren wir uns für folgende Situation.

Definition 1.1 *Sei G offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t,x)$. Eine Funktion $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, heißt Lösung der Differentialgleichung $x' = f(\,\cdot\,, x)$, falls*

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \text{ für alle } t \in I \quad \text{(insbesondere } (t, x(t)) \in G\text{).} \tag{1.1}$$

Gilt außerdem

$$x(t_0) = x_0 \text{ für gegebenes } (t_0, x_0) \in G, \tag{1.2}$$

so heißt x Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

Die Differentialgleichung heißt autonom, wenn das Vektorfeld f nicht von der Zeit abhängt. Wir können uns $x(t)$ dann als Bahn eines Teilchens vorstellen, dass zur Zeit t_0 in x_0 startet und durch Vorgabe der Momentangeschwindigkeit $x'(t) = f(x(t))$ zur Zeit t gesteuert wird. Im nichtautonomen Fall ist die Steuerung zusätzlich zeitabhängig. Es stellen sich folgende Fragen:

1. Ist eine Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt?
2. Existiert eine Lösung des Anfangswertproblems?
3. Wie hängt die Lösung vom Anfangswert x_0 und dem Vektorfeld f ab?

In der Vorlesung werden aus Zeitgrinden nur die ersten beiden Fragen befriedigend beantwortet, wobei wir mit der Eindeutigkeit beginnen.

Beispiel 1.1 Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f(t,x) = 2\sqrt{|x|}$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$x' = f(\cdot, x) \qquad x(0) = 0$$

unendlich viele verschiedene Lösungen in $C^1(\mathbb{R})$, und zwar für $-\infty \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq \infty$

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} -(t-\alpha)^2 & \text{für } t < \alpha \\ \ \ 0 & \text{für } \alpha \leq t \leq \beta \\ (t-\beta)^2 & \text{für } t > \beta. \end{cases}$$

Für die Eindeutigkeit ist die Stetigkeit des Vektorfeldes f demnach nicht ausreichend.

Satz 1.1 (Eindeutigkeit der Lösung) *Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^0(G)$ mit $D_x f \in C^0(G)$, so hat das Anfangswertproblem*

$$x' = f(\,\cdot\,, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

höchstens eine Lösung $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Für den Beweis brauchen wir die nachstehende Folgerung aus dem Schrankensatz, vgl. Satz 1.2 und Folgerung 1.1 in Kapitel 7.

Lemma 1.1 *Sei $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$, $f = f(t,x)$, mit $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$. Dann ist f lokal Lipschitzstetig bzgl. x: zu $(t_0, x_0) \in G$ gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(t_0, x_0) := \{(t,x) : |t - t_0| < \varepsilon, |x - x_0| < \varepsilon\} \subset G$ und eine Konstante $L \in [0, \infty)$ mit*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } (t,x_1), (t,x_2) \in U_\varepsilon(t_0,x_0).$$

Beweis von Satz 1.1 Seien $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Wir zeigen erst $x_1 = x_2$ auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ für ein geeignetes $\delta > 0$. Seien dazu $\varepsilon > 0$, $L < \infty$ wie in Lemma 1.1. Wähle $\delta > 0$ mit $\big(t, x_1(t)\big)$, $\big(t, x_2(t)\big) \in U_\varepsilon(t_0, x_0)$ für $|t - t_0| < \delta$. Für $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|^2$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
|u'| &= 2|\langle x_1 - x_2, x_1' - x_2'\rangle| \\
&= 2|\langle x_1 - x_2, f(\,\cdot\,, x_1) - f(\,\cdot\,, x_2)\rangle| \\
&\leq 2|x_1 - x_2|\,|f(\,\cdot\,, x_1) - f(\,\cdot\,, x_2)| \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 2\,L\,u.
\end{aligned}$$

Daraus folgen für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ die Ungleichungen

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-2Lt}u(t)\big) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\big(e^{2Lt}u(t)\big) \geq 0.$$

Durch Integration ergibt sich $u(t) \leq u(t_0)e^{2L|t-t_0|}$, und wegen $u(t_0) = |x_1(t_0) - x_2(t_0)|^2 = 0$ nach Voraussetzung ist $u(t) = 0$ bzw. $x_1(t) = x_2(t)$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Jetzt zeigen wir $x_1 = x_2$ auf ganz I. Die Menge $M = \{t \in I : x_1(t) = x_2(t)\}$ ist nichtleer, da $t_0 \in M$ nach Voraussetzung, und ist abgeschlossen in I, da x_1, x_2 stetig sind. Nach Schritt 1 gibt es zu $t \in M$ aber ein $\delta > 0$ mit $(t - \delta, t + \delta) \subset M$, d. h. M ist offen. Daraus folgt $M = I$. $\square$

Wir kommen nun zur Frage der Existenz. Das folgende Beispiel zeigt, dass wir im allgemeinen nur eine zeitlich lokale Lösung erwarten können.

Beispiel 1.2 Betrachte $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f(t,x) = x^2$. Das zugehörige Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

hat die Lösung $x : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $x(t) = 1/(1-t)$. Die Lösung ist nach rechts nicht fortsetzbar, denn es gilt $\lim_{t \nearrow 1} x(t) = \infty$.

In Satz 1.3, Kapitel 5, wurde gezeigt, dass die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz stetig ist. Die folgende Konsequenz ist für uns jetzt wichtig.

Satz 1.2 (Vollständigkeit von $C^0(I,\mathbb{R}^n)$) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist $C^0(I,\mathbb{R}^n)$, versehen mit der Supremumsnorm, ein Banachraum.*

Beweis: Sei $x_k \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm, das heißt $\|x_k - x_l\|_I < \varepsilon$ für $k,l > N$. Dann folgt

$$|x_k(t) - x_l(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I,\ k,l > N.$$

Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert $x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t)$. Mit $l \to \infty$ folgt

$$|x_k(t) - x(t)| \le \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I,\ k > N,$$

bzw. $\|x_k - x\|_I \le \varepsilon$ für $k > N$. Somit konvergiert x_k bezüglich der Supremumsnorm, d.h. gleichmäßig, gegen x, und es gilt $x \in C^0(I)$ nach Lemma 1.3 in Kapitel 5, Analysis 1. □

Eine entscheidende Beobachtung zur Konstruktion der lokalen Lösung ist, dass das Anfangswertproblem als Integralgleichung geschrieben werden kann.

Lemma 1.2 *Sei $f \in C^0(G,\mathbb{R}^n)$ und $(t_0,x_0) \in G$. Für $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\{(t,x(t)) : t \in I\} \subset G$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *$x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ ist Lösung des Anfangswertproblems*

$$x'(t) = f\big(t,x(t)\big) \text{ für alle } t \in I, \quad x(t_0) = x_0.$$

(b) *$x \in C^0(I,\mathbb{R}^n)$ erfüllt die Gleichung*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis: (b) folgt aus (a) durch Integration von t_0 bis t, mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Umgekehrt folgt aus (b) die Stetigkeit der Funktion $t \mapsto f(t,x(t))$, und hieraus wieder mit dem Hauptsatz $x'(t) = f(t,x(t))$ durch Differentiation. □

Satz 1.3 (Kurzzeitexistenzsatz von Picard-Lindelöf) *Sei $f \in C^0(G,\mathbb{R}^n)$, mit $D_x f \in C^0(G,\mathbb{R}^{n\times n})$, und $(t_0,x_0) \in G$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$x' = f(\,\cdot\,,x) \text{ auf } I = [t_0-\delta, t_0+\delta], \quad x(t_0) = x_0,$$

eine Lösung $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweis: Als erstes formulieren wir das Problem um in eine Fixpunktgleichung. Zu $(t_0,x_0) \in G$ seien $\varepsilon > 0$ und $L < \infty$ wie in Lemma 1.1 gewählt, und $\delta \in (0,\varepsilon]$ zunächst beliebig. Betrachte im Banachraum $X = C^0(I,\mathbb{R}^n)$ mit Norm $\|\cdot\|_I$ die abgeschlossene Teilmenge

$$A = \{x \in X : |x(t) - x_0| \le \varepsilon \text{ für alle } t \in I\},$$

sowie die Abbildung

$$F : A \to X, \quad [F(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds.$$

Nach Lemma 1.2 ist ein Fixpunkt von F, also $F(x) = x$, eine Lösung des Anfangswertproblems. Wir zeigen nun für $\delta > 0$ hinreichend klein folgende Aussagen:

(1) $F(A) \subset A$ (*Selbstabbildung*)

(2) $\|F(x) - F(y)\|_I \le \frac{1}{2}\|x - y\|_I$ für alle $x, y \in A$ (*Kontraktion*).

Aus dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz 1.1 in Kapitel 8, folgt dann die Existenz eines Fixpunkts $x \in A$, also der gewünschten Lösung der Anfangswertproblems. Da $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, ist $M = \sup\{|f(t,x)| : |t - t_0| \le \varepsilon, |x - x_0| \le \varepsilon\} < \infty$, und für $x \in A$ folgt

$$|[F(x)](t) - x_0| = \Big|\int_{t_0}^t f\big(s, x(s)\big)\,ds\Big| \le M\,|t - t_0| \le M\delta.$$

Also gilt (1) für $\delta \le \varepsilon/M$. Weiter erhalten wir für $x, y \in A$ aus der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned}
|[F(x)](t) - [F(y)](t)| &= \Big|\int_{t_0}^t \big(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big)\,ds\Big| \\
&\le |t - t_0| \sup_{s \in I}\big|f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)\big| \\
&\le L\delta \sup_{s \in I}|x(s) - y(s)|.
\end{aligned}$$

Für $\delta = \min\big(\varepsilon/M,\, 1/(2L)\big)$ folgt also auch Bedingung (2), und der Satz ist bewiesen. □

Beispiel 1.3 Im Satz von Banach wird der Fixpunkt bekanntlich durch Iteration der Abbildung F mit einem geeigneten Startwert bestimmt. Wir wollen das für folgendes triviale Beispiel explizit durchrechnen:

$$x' = \alpha x, \quad x(0) = 1.$$

Hier ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \alpha x$ und $t_0 = 0$. Die Iterationsvorschrift lautet

$$[F(x)](t) = 1 + \int_0^t \alpha x(s)\,ds.$$

Wählen wir als Startfunktion $x_0(t) \equiv 1$, so sind die ersten Iterationsschritte

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 1 + \int_0^t \alpha\,ds = 1 + \alpha t, \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t \alpha(1 + \alpha s)\,ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2}, \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t \alpha\big(1 + \alpha s + \frac{\alpha^2 s^2}{2}\big)\,ds = 1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \frac{\alpha^3 t^3}{6}.
\end{aligned}$$

Durch Induktion sieht man ohne Mühe

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(\alpha t)^j}{j!}.$$

Insbesondere konvergiert das Verfahren für $k \to \infty$ gegen die Lösung $x(t) = e^{\alpha t}$, und zwar lokal gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$.

Für $D \subset \mathbb{R}^n$ offen betrachten wir nun Vektorfelder $f : G = (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit f, $D_x f$ stetig, wobei $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le \infty$. Zu gegebenen Anfangsdaten $x(0) = x_0 \in D$ liefert der Satz von Picard-Lindelöf eine C^1-Lösung $x : (-\delta, \delta) \to D$, und wir fragen uns: unter welchen Vorausetzungen kann das Anfangswertproblem auf dem ganzen Intervall (α, β) gelöst werden? Oder anders:

Was muss passieren, damit die Lösung vorzeitig ihren Geist aufgibt?

Sei t^+ das Supremum aller $t > 0$, so dass das Anfangswertproblem auf $[0, t)$ lösbar ist. Dann ist $t^+ > 0$, und das Anfangswertproblem ist auch auf $[0, t^+)$ noch lösbar: wähle dazu eine Folge $t_k \nearrow t^+$ mit zugehörigen Lösungen $x_k \in C^1([0, t_k), D)$, und definiere

$$x : [0, t^+) \to D,\ x|_{[0,t_k)} = x_k.$$

Für $t_k < t_l$ gilt $x_k = x_l$ auf $[0, t_k)$ wegen der eindeutigen Lösbarkeit, Satz 1.1. Damit ist x wohldefinierte Lösung des Anfangswertproblems. Nach Definition des Supremums ist das Anfangswertproblem auf keinem Intervall $[0, t)$ mit $t > t^+$ lösbar; wir nennen $t^+ \in (0, \infty]$ die maximale Lebensdauer der Lösung (Englisch: *lifespan*). Analog bestimmen wir das maximale Alter $t^- < 0$, und erhalten insgesamt ein maximales Intervall (t^-, t^+), auf dem das Anfangswertproblem eine Lösung hat.

Lemma 1.3 (Divergenz der Lösung) *Sei $f : (\alpha, \beta) \times D \to \mathbb{R}^n$ mit f, $D_x f$ stetig, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le \infty$. Gilt für die maximale Lösung $x \in C^1((t^-, t^+), D)$ des Anfangswertproblems $t^+ < \beta$, so verlässt $x(t)$ für $t \nearrow t^+$ jedes Kompaktum, das heißt für jede kompakte Menge $K \subset D$ gilt $x(t) \notin K$ für t hinreichend nahe bei t^+. Entsprechendes gilt im Fall $t^- > \alpha$.*

Bemerkung. Im Fall $D = \mathbb{R}^n$ bedeutet das

$$t^+ < \beta \Rightarrow \lim_{t \nearrow t^+} |x(t)| = \infty, \qquad \text{bzw.} \qquad t^- > \alpha \Rightarrow \lim_{t \searrow t^-} |x(t)| = \infty.$$

Beweis: Sei $t^+ < \beta$ und $K \subset D$ kompakt. Angenommen es gibt ein $\tau < t^+$ mit $x(t) \in K$ für alle $t \in (\tau, t^+)$. Da f stetig, ist $M = \sup\{|f(t, x)| : t \in [0, t^+],\ x \in K\} < \infty$ und es folgt

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |f(t, x(t))|\, dt \le M\, |t_2 - t_1| \quad \text{für alle } t_{1,2} \in [0, t^+).$$

Somit existiert $x^+ = \lim_{t \nearrow t^+} x(t) \in K$. Nach Satz 1.3 gibt es nun auf einem Intervall $I = (t^+ - \tau, t^+ + \tau)$ eine Lösung y des Anfangswertproblems

$$y' = f(\cdot, y) \text{ auf } I, \quad y(t^+) = x^+.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmen x und y links von t^+ überein, also ergibt Zusammensetzen eine Lösung $\tilde{x}$ der Differentialgleichung auf $[0, t^+ + \tau)$ mit $\tilde{x}(0) = x_0$, im Widerspruch zur Maximalität von t^+. Der Satz ist damit nicht ganz gezeigt, denn die obige indirekte Annahme schließt nicht ein oszillierendes Verhalten aus, bei dem die Lösung für $t \nearrow t^+$ immer wieder nach K zurückkommt. Aber angenommen es gibt eine Folge $t_k \nearrow t^+$ mit $x(t_k) \in K$. Aus Kompaktheitsgründen gilt $\tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \varrho\} \subset D$ für

$\varrho > 0$ klein, sowie $\tilde{M} = \sup\{|f(t,x)| : t \in [0,t^+], x \in \tilde{K}\} < \infty$. Wie oben gezeigt ist $\tilde{t}_k = \sup\{t \geq t_k : x(t) \in \tilde{K}\} < t^+$, und es folgt

$$\varrho \leq |x(\tilde{t}_k) - x(t_k)| = \Big| \int_{t_k}^{\tilde{t}_k} f(t,x(t))\,dt \Big| \leq \tilde{M}(\tilde{t}_k - t_k).$$

Für t_k hinreichend nahe bei t^+ ist dies ein Widerspruch, und der Beweis ist komplett. □

Wir wollen nun im Fall $f : (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Wachstumsabschätzungen für die Lösung herleiten, um unter geeigneten Annahmen die Divergenz auszuschließen. Das folgende Argument verallgemeinert die Abschätzung aus dem Eindeutigkeitssatz.

Lemma 1.4 (Gronwall) *Sei $u \in C^0([t_0,t_1])$, und es gelte*

$$u(t) \leq B(t) + \int_{t_0}^t a(s)u(s)\,ds \quad \text{für alle } t \in [t_0,t_1],$$

wobei $a \in C^0([t_0,t_1])$, $a \geq 0$, und $B \in C^1([t_0,t_1])$. Dann folgt mit $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)\,ds$

$$u(t) \leq e^{A(t)} \Big(B(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} B'(s)\,ds\Big) \quad \text{für alle } t \in [t_0,t_1].$$

Beweis: Wir setzen $g(t) = \int_{t_0}^t a(s)u(s)\,ds$, also $u(t) \leq B(t) + g(t)$, und berechnen

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-A}g\big) = e^{-A}a\,(u-g) \leq e^{-A}a\,B = -\frac{d}{dt}\big(e^{-A}B\big) + e^{-A}B'.$$

Integration von t_0 bis t liefert wegen $g(t_0) = 0$ und $A(t_0) = 0$

$$e^{-A(t)}g(t) \leq B(t_0) - e^{-A(t)}B(t) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)}B'(s)\,ds.$$

Multiplikation mit $e^{A(t)}$ und Einsetzen in $u(t) \leq B(t) + g(t)$ ergibt die Ungleichung. □

Satz 1.4 (Langzeitexistenz bei linearem Wachstum) *Sei $f : (\alpha,\beta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f, D_x f$ stetig und $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq \infty$. Es gebe $a,b \in C^0((\alpha,\beta))$ mit $a \geq 0$, so dass gilt:*

$$|f(t,x)| \leq a(t)|x| + b(t) \quad \text{für alle } t \in (\alpha,\beta),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist das Anfangswertproblem $x' = f(\cdot,x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, auf ganz (α,β) lösbar, und mit $A(t) = \int_0^t a(s)\,ds$ gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq e^{A(t)}\Big(|x_0| + \int_0^t e^{-A(s)}b(s)\,ds\Big) \quad \text{für alle } t \in (\alpha,\beta). \tag{1.3}$$

Beweis: Für $t \in [0,t^+)$ gilt die Abschätzung

$$|x(t)| \leq |x_0| + \int_0^t |f(s,x(s))|\,ds \leq |x_0| + \int_0^t (a(s)|x(s)| + b(s))\,ds,$$

das heißt es ist $|x(t)| \leq B(t) + \int_0^t a(s)\,ds$ mit $B(t) = |x_0| + \int_0^t b(s)\,ds$. Aus dem Lemma von Gronwall folgt die gewünschte Abschätzung auf $[0,t^+)$. Wäre $t^+ < \beta$, so gilt $|x(t)| \to \infty$ mit $t \nearrow t^+$ nach Lemma 1.3, im Widerspruch zur Abschätzung. □

2 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten hier das Anfangswertproblem

$$(2.1) \qquad x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \text{ für } t \in I = (\alpha, \beta), \quad x(t_0) = x_0.$$

Dabei ist $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ sowie $x : I \to \mathbb{R}^n$. Allerdings ist es nützlich, auch komplexwertige Koeffizienten und Lösungen zuzulassen. Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ist ein komplexes $n \times n$ System äquivalent zu einem reellen $(2n) \times (2n)$ System, das heißt unsere Existenz- und Eindeutigkeitstheorie ist voll anwendbar. Wir betrachten erst das sogenannte homogene Problem, das heißt den Fall $b(t) \equiv 0$.

Satz 2.1 (Anfangswertisomorphismus) *Sei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n\times n})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist die Menge $L_A = \{x \in C^1(I, \mathbb{K}^n) : x' = Ax \text{ auf } I\}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, genauer ist für jedes $t_0 \in I$ die Abbildung*

$$\delta_{t_0} : L_A \to \mathbb{K}^n,\ \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis: Mit $x, y \in L_A$ ist auch $\lambda\, x + \mu\, y \in L_A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, denn

$$(\lambda\, x + \mu\, y)' = \lambda\, x' + \mu\, y' = \lambda\, Ax + \mu\, Ay = A(\lambda x + \mu y).$$

Also ist L_A ein Untervektorraum von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$, und die Abbildung $\delta_{t_0} : L_A \to \mathbb{K}^n$ ist wohldefiniert und linear. Da $|A(t)x| \leq |A(t)|\,|x|$, gibt es nach Satz 1.4 zu jedem $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x' = Ax$ auf ganz I mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$, das heißt die Abbildung δ_{t_0} ist surjektiv. Aus der Eindeutigkeit der Lösung nach Satz 1.1 folgt, dass δ_{t_0} auch injektiv ist. $\square$

Eine Basis von L_A bezeichnet man als Fundamentalsystem der Gleichung $x' = Ax$. Explizit erhält man ein solches Fundamentalsystem, indem man die Gleichung zu linear unabhängigen Anfangsdaten löst, etwa $x_j(t_0) = e_j$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis ist.

Für beliebige n Lösungen $x_i : I \to \mathbb{K}^n$ der Differentialgleichung impliziert der Satz folgende Alternative: entweder bilden die Vektoren $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ für jedes $t \in I$, oder es gibt Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle Null, mit $\lambda_1 x_1(t) + \ldots + \lambda_n x_n(t) = 0$ für alle $t \in I$. Wir können n Funktionen $x_1, \ldots, x_n : I \to \mathbb{K}^n$ zu einer matrixwertigen Funktion $X : I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ zusammenfassen, so dass x_j die j-te Spalte von X ist. Es gilt dann

$$x_j' = Ax_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \quad \Leftrightarrow \quad X' = AX.$$

Dabei steht rechts die Matrixmultiplikation. Die Äquivalenz folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung von X spaltenweise berechnet werden kann, und dass die j-te Spalte von AX gleich Ax_j ist. Die Tatsache, dass die Vektoren $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ für Lösungen des Systems $x' = Ax$ entweder für alle $t \in I$ oder für kein $t \in I$ linear abhängig sind, ergibt sich alternativ auch aus folgender Formel.

Satz 2.2 (Formel von Liouville) *Sei $X \in C^1(I, \mathbb{K}^{n\times n})$ eine Lösung von $X' = AX$ auf I, wobei $A \in C^0(I, \mathbb{K}^{n\times n})$. Dann gilt für beliebiges $t_0 \in I$*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \cdot \exp\Big(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\, ds\Big) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Beweis: Ist $\det X(t_0) = 0$, so gilt $\det X(t) = 0$ für alle $t \in I$ nach Satz 2.1, und die Formel trifft zu. Andernfalls ist $\det X(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, und es gilt die allgemeine Formel

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}\big(X(t)^{-1}X'(t)\big).$$

Setzen wir $X' = A(t)X(t)$ ein und beachten $\operatorname{tr}(X^{-1}AX) = \operatorname{tr}(XX^{-1}A) = \operatorname{tr}(A)$, so folgt

$$(\det X)'(t) = \det X(t) \cdot \operatorname{tr}\big(A(t)\big).$$

Damit gilt weiter

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s)\,ds} \det X(t)\Big) = 0,$$

und durch Integration folgt die Behauptung. $\square$

Für die konkrete Berechnung eines Fundamentalsystems gibt es keine allgemeinen Rezepte. Eine Ausnahme bilden die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, für die ein Fundamentalsystem durch Übergang zu einer Basis bestimmt werden kann, in der die Gleichungen entweder ganz entkoppeln oder auf sehr spezielle Weise gekoppelt sind, genauer ist die Koeffizientenmatrix entweder diagonal oder hat Jordansche Normalform. Dies ist (vielleicht) in der Linearen Algebra behandelt worden, darum will ich hier etwas anders vorgehen: die Matrix-Exponentialfunktion ist definiert durch

$$\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n},\ \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Für $|A| \leq R$ gilt $|A^k| \leq |A|^k \leq R^k$. Wegen $\sum_{k=0}^\infty \frac{R^k}{k!} = e^R < \infty$ konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium, und die Konvergenz ist gleichmäßig für $|A| \leq R$. Insbesondere ist die exp stetig auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

Satz 2.3 (Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten) *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist*

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n},\ X(t) = \exp(tA),$$

die Lösung des Anfangswertproblems $X' = AX$, $X(0) = \mathrm{E}_n$. Die Spaltenvektoren $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, bilden ein Fundamentalsystem für $x' = Ax$ zu den Anfangswerten $x_j(0) = e_j$.

Beweis: Für $|t| \leq T$ und $k \geq 1$ gilt

$$\Big|\frac{d}{dt}\frac{(tA)^k}{k!}\Big| \leq \Big|\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}\Big| \leq |A|\,\frac{(T|A|)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Wegen $\sum_{k=0}^\infty \frac{(T|A|)^k}{k!} = e^{T|A|} < \infty$ konvergiert die formal differenzierte Reihe absolut und gleichmäßig für $|t| \leq T$. Es folgt durch gliedweise Differentiation, vgl. Satz 3.2 in Kapitel 5,

$$X'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = AX(t).$$

Hier haben wir benutzt, dass die Multiplikation von links mit A eine stetige Abbildung auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist. Weiter gilt $X(0) = A^0 = \mathrm{E}_\mathrm{n}$ per Definition, und somit ist $X(t)$ ein Fundamentalsystem nach Satz 2.1. $\square$

Folgerung 2.1 *Die Matrix-Exponentialabbildung hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\exp : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ *und* $\exp(0) = \mathrm{E}_n$.

(b) $\det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(\mathrm{tr}\,(A)\big)$.

(c) $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$ *für alle* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$.

(d) $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, *falls* $[A,B] = AB - BA = 0$.

Beweis: Die Invertierbarkeit von $e^A = e^{tA}|_{t=1}$ folgt aus Satz 2.3 sowie Satz 2.1, und $e^0 = \mathrm{E}_n$ gilt nach Definition. Gleichung (b) wurde bereits in Satz 2.2 gezeigt. Für (c) argumentieren wir mit dem Eindeutigkeitssatz: die Funktionen $t \mapsto e^{tSAS^{-1}}$ sowie $t \mapsto Se^{tA}S^{-1}$ lösen beide die Differentialgleichung $X' = (SAS^{-1})X$ zum Anfangswert $X(0) = \mathrm{E}_n$ und sind damit gleich; für $t = 1$ folgt (c). Bei (d) gehen wir ähnlich vor, aber in zwei Schritten: zunächst sind sowohl $t \mapsto e^{tA}B$ als auch $t \mapsto Be^{tA}$ Lösungen des Anfangswertproblems $X' = AX$ mit $X(0) = B$, wobei für die zweite Funktion die Voraussetzung $[A,B] = 0$ eingeht:

$$\frac{d}{dt}\big(Be^{tA}\big) = BAe^{tA} = A\big(Be^{tA}\big).$$

Also gilt $e^AB = Be^A$. Jetzt berechnen wir für $X(t) = e^{tA}e^{tB}$

$$X'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tA} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)X(t).$$

Es folgt $X(t) = e^{t(A+B)}$, insbesondere $e^Ae^B = e^{A+B}$. □

Die Eigenschaften (c) und (d) können alternativ auch aus der Definition der Matrix-Exponentialfunktion als Reihe hergeleitet werden. Für (d) ist dabei wesentlich, dass e^Ae^B mit dem Cauchyprodukt für Reihen berechnet werden kann, wenn $[A,B] = 0$. Nach (c) reicht es zur Berechnung von e^A den Fall zu behandeln, wenn A Jordansche Normalform hat. Wir wollen das nicht allgemein durchführen, sondern uns auf folgendes Beispiel beschränken.