**Aufgabe 1** *(Existenz eines Fixpunkts)*
Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass es eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$ gibt (eine solche Lösung heißt Fixpunkt von $f$). Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn das Intervall nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 2** *(Sprungstellen monotoner Funktionen)*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Nach Vorlesung existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f(x) =: f_+(x_0)$ und $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) =: f_-(x_0)$. Zeigen Sie:

(1) $f$ ist genau dann stetig in $x_0 \in (a, b)$, wenn $f_+(x_0) = f_-(x_0)$. Andernfalls nennen wir $x_0$ Sprungstelle mit Sprung $f_+(x_0) - f_-(x_0) > 0$.

(2) Die Menge der Sprungstellen von $f$ ist abzählbar.

**Aufgabe 3** *(Differentiation von bilinearen Termen)*
Die Abbildung $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $(u, v) \mapsto B(u, v)$, sei bilinear, das heißt für $u_1, u_2, u \in \mathbb{R}^m$, $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v), \\ B(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) &= \mu_1 B(u, v_1) + \mu_2 B(u, v_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie für differenzierbare $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$, $g : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ die Produktregel

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Schreiben Sie die Regel in folgenden Spezialfällen auf:

1. $B(u, v) = \langle u, v \rangle$ (Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$),
2. $B(u, v) = uv$ (komplexe Multiplikation auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$),
3. $B(u, v) = u \times v$ (Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$),
4. $B(u, v) = uv$ (Produkt der Matrizen $u$ und $v$).

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 16.1.2020 bis 11:00.*