Aufgabe 1 *(zur Definition der Ableitung)*
Sei $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar auf $(-a, a)\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\, g(x)$, auf $(-a, a)$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 2 *(Hebbarer Punkt für f')*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ stetig, auf $I\backslash\{x_0\}$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz $f'(x_0) = a$.

Aufgabe 3 (*Optimal Runner*)
Scrat $(-a, b_1)$ will so schnell wie möglich zu seiner kostbaren Eichel (a, b_2), wobei $a, b_1, b_2 > 0$. Zwischendurch muss er irgendwo an der unendlich langen Theke, der x-Achse, ein Bier holen. Die Strecke ist also

$$L(x) = \sqrt{(x + a)^2 + b_1^2} + \sqrt{(x - a)^2 + b_2^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es einen optimalen Punkt gibt und berechnen Sie diesen.

(b) Variante: er muss 10 Bier abholen, darum hat er auf den beiden Teilstrecken verschiedene Geschwindigkeiten $v_1 > v_2$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 23.1.2020 bis 11:00.