Aufgabe 1 *(exponentielles Wachstum)*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f' \geq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad &\Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \geq e^{-\alpha x_1} f(x_1) \\ f' \leq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad &\Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \leq e^{-\alpha x_1} f(x_1). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Potenzgesetze)*
Zeigen Sie für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \\ \left(\frac{1}{a}\right)^x &= a^{-x} \qquad a^x b^x = (ab)^x. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Kettenregel)*
Berechnen Sie die Ableitungen von $f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x^x)^x \quad \text{und} \quad g(x) = x^{(x^x)}.$$

Aufgabe 4 *(Kreisbewegung)*
Sei I ein Intervall, $t_0 \in I$, $\omega \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$c'(t) = i\omega c(t) \text{ für } t \in I, \quad c(t_0) = z_0,$$

ist die Funktion $c(t) = z_0 e^{i\omega(t-t_0)}$, $t \in I$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Eine Aufgabe optional. Abgabe ist am Donnerstag, 30.1.2020 bis 11:00.