Übungsaufgaben zur Analysis I — WS 19/20, Serie 13

Prof. Dr. E. Kuwert — 29. Januar 2020

Aufgabe 1 *(Polardarstellung)*
Rechnen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung $z = r\,e^{i\vartheta}$ nach, wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

Schreiben Sie in der Form $r\,e^{i\vartheta}$: -3, $4i$, $-5i$, $-e^{2i}$, $ie^{it} (t \in \mathbb{R})$, $1+i$, $-1-i$, $(1+i)^{2020}$.

Aufgabe 2 *(Tangens)*
Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$, heißt Tangens. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\tan(t + \pi) = \tan t$.

(b) tan bildet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab, mit Umkehrfunktion arctan.

(c) arctan ist differenzierbar, es gilt $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Aufgabe 3 *(zur Funktionalgleichung)*
Berechnen Sie mittels der Eulerschen Formel die Summen

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kt \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kt \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 4 *(Anfangswertproblem)*
Für eine reelle 2×2-Matrix A und $z_0 \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$c'(t) = A\,c(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad c(0) = z_0,$$

für eine gesuchte Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass im Fall $z_0 = 0$ die Nullfunktion die einzige Lösung ist (*Hinweis:* berechnen Sie $\frac{d}{dt}|c(t)|^2$ und verwenden Sie Aufgabe 1, Serie 12).

(b) Folgern Sie aus (a), dass es für jedes z_0 höchstens eine Lösung gibt.

(c) Bestimmen Sie die Lösung im Fall

$$A = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Eine Aufgabe ist optional. Abgabe ist am Donnerstag, 6.2.2020 bis 11:00.