Aufgabe 1 *(punktweise/gleichmäßige Konvergenz)*
Konvergiert die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig?

(a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

(b) $f_n(x) = x - n\log(1+\dfrac{x}{n})$.

Aufgabe 2 *(Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen)*
Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 3 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, insbesondere beschränkt. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$, Lipschitzstetig ist.

Aufgabe 4 *(Exponentialabbildung für Matrizen)*
Es bezeichne $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$ die Euklidische Norm der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Die Reihe $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergent.

(c) Die Funktion $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $X(t) = \exp(tA)$, ist (die) Lösung von

$$X'(t) = A\,X(t), \quad X(0) = E_n.$$

(d) Folgern Sie: ist $[A,B] = AB - BA = 0$, so gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\,\exp(B)$.

keine Abgabe