Aufgabe 1 *(Flächeninhalt der Ellipse)*
Berechnen Sie den von einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, also den Flächeninhalt der Menge

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 *(Substitutionsregel)*
Berechnen Sie dir folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t}$ (Substitution $x = \tan\frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\,dx$ $(a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Aufgabe 3 *(Substitutionsregel)*
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$.

Aufgabe 4 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = (a,b)$ offen. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi : I \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,dx,$$

wobei $a : I^* \to I$ und $b : I^* \to I$ differenzierbar sind. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 5 *(Partielle Integration)*
Für $u, v \in C^0([-\pi,\pi]$ definieren wir $\langle u, v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist (siehe Lemma 5.3). Berechnen Sie weiter die Skalarprodukte $\langle u_k, u_l\rangle$, $\langle v_k, v_l\rangle$ sowie $\langle u_k, v_l\rangle$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos kx \quad \text{und} \quad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 6 *(zur Deltafunktion)*
Sei $g \in C^0(\mathbb{R})$ mit $g(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $\int_{\mathbb{R}} g = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$\delta_\varepsilon : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, \delta_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, f(x)\, dx, \qquad \text{wobei } g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, g(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Zeigen Sie $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_\varepsilon(f) = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$. Gibt es $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}} g_0(x)\, f(x)\, dx = f(0)$ für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$?

keine Abgabe, keine Besprechung