Aufgabe 1 Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

(a) $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\liminf_{n\to\infty}(-a_n)$,

(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Hinweis. Hier soll nicht gleichzeitig $\limsup_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ und $\limsup_{n\to\infty} b_n = \mp\infty$ sein, die rechte Seite wäre dann nicht definierbar.

Aufgabe 2 *(Mächtigkeit der irrationalen Zahlen)*
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist M nicht endlich, so besitzt M eine abzählbare unendeliche Teilmenge.

(b) Ist M nicht endlich und A abzählbar, so ist M gleichmächtig zu $M \cup A$.

(c) Ist M überabzählbar und $A \subset M$ abzählbar, so ist $M \backslash A$ gleichmächtig zu M.

Folgern Sie: die Menge der irrationalen Zahlen ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 *(Supremum und Infimum: Beispiele)*
Bestimmen Sie für A und B jeweils Supremum und Infimum, und entscheiden Sie, ob es sich um Maximum bzw. Minimum handelt (ob die Zahlen also durch ein Element der Menge realisiert werden):

$$A = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ x + \frac{1}{x} : x > 0 \right\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Donnerstag, 5.12.2019 bis 11:00.