Aufgabe 1 *(Abschluss und Inneres)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\operatorname{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$ für alle offenen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $\partial(\partial M) = \partial M$ für alle $M \subset \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 *(Produktmengen)*
Seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) A, B offen $\quad\Rightarrow\quad A \times B$ offen im $\mathbb{R}^2$

(2) A, B abgeschlossen $\quad\Rightarrow\quad A \times B$ abgeschlossen im $\mathbb{R}^2$

(3) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

Aufgabe 3 (*Abschluss und Rand einer Kugel*)
Sei $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\} \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$.

(b) $\partial B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = r\}$.

Aufgabe 4 *(Hausdorffabstand)*
Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $\mathcal{A}$ das System aller abgeschlossenen beschränkten Teilmengen $A \neq \emptyset$ von X. Wir setzen

$$U_\varrho(A) = \{x \in X : \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } d(x, a) < \varrho\}.$$

Der Hausdorffabstand von $A, B \in \mathcal{A}$ ist dann definiert durch

$$d_H(A, B) = \inf\{\varrho > 0 : A \subset U_\varrho(B),\ B \subset U_\varrho(A)\}.$$

Zeigen Sie dass d_H eine Metrik auf $\mathcal{A}$ ist.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 21.5.2020.