Aufgabe 1 (*Zusammenhang I*)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt *wegzusammenhängend*, falls es für alle $x_0, x_1 \in X$ einen Weg von x_0 nach x_1 gibt, also eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Zeigen Sie: ist X wegzusammenhängend, so auch zusammenhängend.
Bemerkung. Es gibt metrische Räume die zusammenhängend sind, aber nicht wegzusammenhängend!

Aufgabe 2 (*Zusammenhang II*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass je zwei Punkte $x_0, x_1 \in \Omega$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, also eine stetige, stückweise affin-lineare Kurve $\gamma : [0, 1] \to \Omega$.

Aufgabe 3 (*Kompaktheit in* $C^0([0, 1])$)
Sei $I = [0, 1]$. Auf dem Vektorraum $C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$ betrachten wir die Supremumsnorm $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Man zeige:

(a) $\|\cdot\|_I$ ist tatsächlich eine Norm.

(b) $K = \{f \in C^0(I) : \|f\|_I \leq 1\}$ ist abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $C^0(I)$, aber nicht kompakt.

Aufgabe 4 (*Zusammenhang III*)

(a) Sind $E, F \subset X$ zusammenhängend und $E \cap F \neq \emptyset$, so ist auch $E \cup F$ zusammenhängend.

(b) Sei X metrischer Raum. Die lokal konstanten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum. Bestimmen Sie die Dimension im Fall $X = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 28.5.2020.