Aufgabe 1 *(Wärmeleitungsgleichung)*
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/4t}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ ist.

Aufgabe 2 *(Ausgleichsgerade)*
Die Ausgleichgerade $y = ax + b$ zu den Messwerten $\{(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 : k = 1, \ldots, N\}$ ist dadurch bestimmt, dass der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Quadratsumme

$$f(a,b) := \sum_{k=1}^{N} (ax_k + b - y_k)^2$$

minimiert. Wir nehmen zusätzlich an, dass nicht alle x_k identisch sind. Bestimmen Sie den Punkt (a, b)!

Aufgabe 3 *(Gradient, Rotation, Divergenz)*
Die Differentialoperatoren $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ sind im $\mathbb{R}^3$ folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f),\\
\operatorname{rot} X &= (\partial_2 X_3 - \partial_3 X_2, \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3, \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1),\\
\operatorname{div} X &= \partial_1 X_1 + \partial_2 X_2 + \partial_3 X_3.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie für $f \in C^2(\Omega)$ und $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0.$$

Aufgabe 4 *(eindimensional vs. mehrdimensional)*
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - \varepsilon x^2)(y - x^2)$, für $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Skizzieren Sie die Mengen $\{(x,y) : f(x,y) > 0\}$.

(b) Sei L eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_L$ in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum hat.

(c) Die Funktion f hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 4.6.2020.