Hinweis. Für die folgenden Aufgaben benötigen Sie die Sätze 3.4,3.5,3.6 im Skript, die in Video # 9 besprochen werden.

Aufgabe 1 (*Euler-Identität*)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, t > 0$ (f ist homogen vom Grad α).

(2) $Df(x)x = \alpha f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Hinweis. Betrachten Sie für (2) $\Rightarrow$ (1) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 2a (*Ableitung von* det *in* E_n)
Begründen Sie, dass $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det(X)$, an der Stelle $X = E_n$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$Df(E_n)H = \operatorname{tr}(H) \quad \text{für } H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Hinweis. Die Determinante ist z.B. durch die Leibniz-Formel gegeben:

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \quad \text{für } X = (x_{ij}).$$

Aufgabe 2b (*Ableitung von* det)
Sei $X \in \mathrm{Gl(n, \mathbb{R})}$. Zeigen Sie für $f(X) = \det X$ die Formel

$$Df(X)H = (\det X) \operatorname{tr}(X^{-1}H).$$

Aufgabe 3 (*Inversionsabbildung*)
Zeigen Sie die Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung von

$$f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ f(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

Folgern Sie $Df(x) = \varphi(|x|)T(x)$ mit $\varphi(x) > 0$ und $T(x) \in \mathbb{O}^-(n)$, wobei

$$\mathbb{O}^-(n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det(A) = -1, \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \forall v, w \in \mathbb{R}^n\}.$$

Aufgabe 4 (*Produktregel*)
Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in \Omega$. Zeigen Sie die Produktregel wie folgt:

(a) Für $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(y) = y_1 y_2$, gilt $Dh(y) = (y_2, y_1)$.

(b) Für $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\phi = (f, g)$, gilt $D\phi(x) = (Df(x), Dg(x))$.

Verwenden Sie nun die Kettenregel.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 11.6.2020.