
Aufgabe 1 (*Gradientenflüsse*)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2)$, für gegebene $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\gamma'(t) = -\operatorname{grad} f(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = (x_0, y_0).$$

(a) Zeigen Sie: $f(\gamma(t))$ ist monoton fallend. Ist $\gamma(t)$ nicht konstant, so ist $f(\gamma(t))$ sogar streng monoton fallend.

(b) Zeigen Sie, dass $\gamma(t)$ die Höhenlinien von f senkrecht schneidet.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

(d) Zeichnen Sie typische Lösungskurven und Höhenlinien in den drei Fällen $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{4}, 1)$, $(-\frac{1}{4}, 1)$ und $(0, 1)$.

Aufgabe 2 *(Nichtdegenerierte kritische Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Sei $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Gelte für $x \in \Omega$, dass $Dg(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ injektiv ist. Zeigen Sie, dass dann $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $g|_{B_\varepsilon(x)} : B_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^m$ injektiv ist.

(b) Ein kritischer Punkt $x \in \Omega$ der Funktion $f \in C^2(\Omega)$ heißt nichtdegeneriert, wenn die Hessematrix

$$D^2 f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \le i,j \le n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist: es gibt eine offene Umgebung $B_\varepsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.
Hinweis. Wenden Sie (a) auf die Abbildung $\operatorname{grad} f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ an der Stelle x an!

Aufgabe 3 *(Konvexe Mengen)*
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $x_0, x_1 \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt, dass $(1-t)x_0 + tx_1$ in M enthalten ist.
$x \in \mathbb{R}^n$ heißt Konvexkombination von $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, falls $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ für $\lambda_i \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn jede Konvexkombination von Punkten in M wieder in M liegt.

Aufgabe 4 *(Tangentialebene an Graphen)*
Sei G der Graph der Funktion

$$f : \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}.$$

(a) Berechnen Sie den Tangentialraum und die nach oben weisende Einheitsnormale von G im Punkt $p = (x, f(x))$.

(b) Stellen Sie $G_{p,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(G - p)$ als Graph einer Funktion $f_{p,\lambda}$ auf einem Gebiet $\Omega_{p,\lambda}$ dar.

(c) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert von $f_{p,\lambda}$ für $\lambda \to 0$.

Wie kommen Sie mit Vorlesung und Übungen zurecht? Schreiben Sie uns dazu ein paar Sätze in Ihrer Lösung! Dafür erhalten Sie **einen Bonuspunkt**. *Schreiben Sie Ihr Feedback bitte in die Mail, die Sie an Ihren Tutor/Ihre Tutorin schicken.*

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 18.6.2020.