Übungsaufgaben zur Analysis II | SS 20, Serie 6
Ernst Kuwert, Lothar Schiemanowski | 18. Juni 2020

---

**Aufgabe 1** *(Kritische Punkte)*
Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen $f$. Bestimmen Sie in den nicht degenerierten Fällen den Index. Der Index bezeichnet die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hessesche Matrix an dem kritischen Punkt. Skizzieren Sie die Höhenlinien $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ in der Nähe der kritischen Punkte.

(a) $f(x,y) = x - x^2 - y^2$.

(b) $f(x,y) = \sin(xy)$.

(c) $f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$.

**Aufgabe 2** *(Maximumprinzip)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie dass $u$ sein Maximum auf dem Rand annimmt: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
*Hinweis.* Nehmen Sie erst $\Delta u > 0$ an, betrachten Sie dann $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$.

**Aufgabe 3** *(Stützhyperebenen)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie: zu jedem $x \in \partial M$ gibt es ein $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, so dass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x \rangle \geq 0\}.$$

Man nennt dann $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, y - x \rangle = 0\}$ eine Stützhyperebene in $x \in \partial M$.
*Anleitung.* Wähle $p_k \in \mathbb{R}^n \backslash M$ mit $p_k \to x$, und bestimme $x_k \in M$ mit $|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|$. Nach Wahl einer Teilfolge konvergiert $(x_k - p_k)/|x_k - p_k|$ gegen ein $\nu$ wie verlangt (was zu zeigen ist).

**Aufgabe 4**
Seien $a, b, c$ die Ecken eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abstandssumme

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = |x - a|^2 + |x - b|^2 + |x - c|^2.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gibt einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)$.

(b) Der Punkt $x$ ist eindeutig bestimmt. Um welchen Punkt handelt es sich?

(c) Bestimmen Sie die Hessesche Matrix von $f$!

*Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 25.6.2020.*