Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 20, Serie 7

Ernst Kuwert, Lothar Schiemanowski — 26. Juni 2020

Aufgabe 1 (*Konvexe Funktionen*)
Beweisen Sie für $x, y \geq 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Hinweis. Betrachten Sie $f(x) = \dfrac{x^p}{p} - xy$ für festes $y > 0$.

Aufgabe 2 (*Hauptachsentransformation*)
Bestimmen Sie die Extremstellen und Extremwerte der Funktion

$$\varphi : \mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3.$$

Aufgabe 3 (*Binomialreihe*)
Rechnen Sie nach, dass die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = (1 + x)^\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

bis zur Ordnung k durch

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j} x^j$$

gegeben ist. Hierbei ist

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - j + 1)}{j!}.$$

Zeigen Sie für $x \in [0, 1)$ mittels Abschätzung des Restglieds, dass die Binomialreihe $B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ in der Tat gegen $f(x)$ konvergiert.

Aufgabe 4 (C^∞*-Funktion*)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wie lautet das Taylorpolynom $P_k(x)$ von f im Nullpunkt?

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 2.7.2020.