

Aufgabe 1 (*Gleichmäßige Konvergenz*)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Sei D eine Menge. Zeigen Sie, dass $(B(D), \|\cdot\|_D)$ ein Banachraum ist, d.h. jede Cauchyfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B(D)$ konvergiert gegen ein $f \in B(D)$.
- (b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nun kompakt. Zeigen Sie, dass $C^0(D)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $B(D)$ ist. Insbesondere ist $C^0(D)$ auch ein Banachraum.

Teilaufgabe (a) gibt zwei Punkte, Teilaufgabe (b) einen Punkt.

Aufgabe 2 (*Formel von Cauchy-Hadamard*)

Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ durch

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

gegeben ist.

Hinweis. Verwenden Sie das Wurzelkriterium für Konvergenz von Reihen!

Aufgabe 3 (*Zum Konvergenzradius*)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{n-2}}{\sqrt{n!}} z^n$$

$$(d) 1 + 3z + 5z^2 + 7z^3 + \dots \quad (e) 1 + \frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 + \dots$$

Teilaufgaben (a),(b),(d),(e) geben jeweils einen halben Punkt, (c) gibt einen Punkt.

Aufgabe 4 (*Exponentialabbildung für Matrizen*)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Reihe $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergent.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst $|AB| \leq |A||B|$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (b) Die Funktion $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $X(t) = \exp(tA)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = E_n.$$

Hinweis. Dass X differenzierbar ist, ist eine Konsequenz aus Satz 5.5.

(c) Folgern Sie aus (b): für $[A, B] = AB - BA = 0$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

Jede Teilaufgabe gibt einen Punkt.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Donnerstag, den 9.7.2020.