Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 20, Serie 9
Ernst Kuwert, Lothar Schiemanowski — 10. Juli 2020

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ an der Stelle 0.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Taylorreihe der Ableitung von arcsin!

Aufgabe 2
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n \neq 1\}$. Bestimmen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{1 - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

an der Stelle 0 bis zur k-ten Ordnung.

Aufgabe 3
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x, y)dx \quad \text{und} \quad f^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)dx$$

wohldefiniert sind, die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, aber $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Aufgabe 4
Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, das heißt $\overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$ ist kompakt.
Zeigen Sie, dass für $f \in C^0(\mathbb{R})$ die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$

wohldefiniert ist und dass $F \in C^1(\mathbb{R})$ ist mit

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g'(x - y)dy.$$

Hinweis: Wenden Sie Satz 6.2 auf $h(x, y) = f(y)g(x - y)$ an. Beachten Sie dabei genau die Voraussetzungen des Satzes!

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am **Freitag, den 17.7.2020**.