Übungsaufgaben zur Analysis II — SS 20, Serie 10
Ernst Kuwert, Lothar Schiemanowski — 17. Juli 2020

Aufgabe 1 *(Teilchen im elektromagnetischen Feld)*
Wir betrachten ein geladenes Teilchen mit einer Masse $m > 0$ und einer Ladung $q \in \mathbb{R}$. Die Bahn des Teilchens wird durch $u \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ beschrieben. Auf das Teilchen wirkt ein elektrisches Feld $E \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und ein magnetisches Feld $B \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Wir nehmen an, dass

$$E = -\text{grad } \phi \quad \text{und} \quad B = \text{rot } A$$

für ein $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und ein $A \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt.
Das Teilchen bewegt sich gemäß der Euler–Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$\mathcal{F}(u) = \int_I \frac{1}{2} m |u'(t)|^2 + q\langle A(u(t)), u'(t)\rangle - q\phi(u(t)) dt.$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Lagrangefunktion.

(b) Bestimmen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung.

Teilaufgabe (a) gibt 1 Punkt, Teilaufgabe (b) gibt 2 Punkte.
Hinweis. Die Rotation rot wurde in Serie 3, Aufgabe 3 definiert.

Aufgabe 2
Sei $u \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve, d.h. es gelte $u'(t) \neq 0$ für jedes $t \in I$.
Sei u ein stationärer Punkt des Bogenlängefunktionals

$$\mathcal{L}(u) = \int_I |u'(t)| dt.$$

(a) Bestimmen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung, die u erfüllt.

(b) Die *Krümmung* der Kurve u an der Stelle $u(t)$ ist

$$\kappa = \frac{\sqrt{|u'(t)|^2 |u''(t)|^2 - \langle u'(t), u''(t)\rangle^2}}{|u'(t)|^3}.$$

Zeigen Sie, dass die Krümmung an jedem Punkt der Kurve verschwindet, wenn u nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. wenn $|u'(t)| = 1$ für alle $t \in I$.

Teilaufgabe (a) gibt zwei Punkte, (b) einen Punkt.

Aufgabe 3
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in denen $Df(x, y)$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ kein Diffeomorphismus ist.

(c) Sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Bestimmen Sie die Bildmenge $V = f(U)$ und berechnen Sie die inverse Abbildung $(f|_U)^{-1} : V \to U$.

Jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt.

Aufgabe 4
Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es gebe ein $C > 0$, so dass $|Dg(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass $f = \mathrm{id} + \epsilon g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ein Diffeomorphismus ist.
Hinweis. Das Bild von f ist vollständig und damit abgeschlossen.

Bitte senden Sie Ihre Lösungen an Ihren Tutor/Ihre Tutorin bis 12 Uhr am Freitag, den 24.7.2020.