
Für diese Aufgaben können Bonuspunkte erlangt werden. Bitte reichen Sie eine Lösung nur dann ein, wenn Sie noch nicht genügend Punkte für die Studienleistung haben. Die Abgabefrist dafür ist 12 Uhr am Donnerstag, der 30.7.2020.

Aufgabe 1 *(Untermannigfaltigkeiten)*
Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n} = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Bestimmen Sie im Punkt E_n den Tangentialraum.

Aufgabe 2 *(Lagrangemultiplikatoren)*
Seien $a, b, c > 0$ und sei E das Ellipsoid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n : (x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das großmöglichste Volumen eines achsenparallelen Quaders, der in E enthalten ist.

Aufgabe 3 *(horizontaler Wurf mit Reibung)*
Beim Wurf aus Höhe $h > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $(v, 0)$ und der Erdbeschleunigung g ist die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ gegeben durch

$$\big(x(t), y(t)\big) = \begin{cases} \Big(vt\,,\ h - \dfrac{g}{2}t^2\Big) & \varepsilon = 0 \\ \Big(\dfrac{1-e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon}\,v\,,\ h + \big(\dfrac{1-e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} - t\big)\dfrac{g}{\varepsilon}\Big) & \varepsilon \neq 0. \end{cases}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist der Reibungsparameter. Seien $T(\varepsilon)$ der Zeitpunkt des Aufschlags in Höhe $y = 0$, und $w(\varepsilon)$ die Wurfweite. Begründen Sie die Existenz von $T'(0)$ und $w'(0)$, und berechnen Sie diese.

Aufgabe 4 *(eine Untermannigfaltigkeit)*
Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass $M\backslash\{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht ganz M.

Aufgabe 5 (*Graphendarstellung*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$. Es sei $P \circ DF(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar, wobei

$$P : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ P(x, z) = x.$$

Zeigen Sie: es gibt einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ zwischen zwischen offenen Umgebungen U von x_0 und V von $y_0 := P \circ F(x_0)$ sowie eine Funktion $u \in C^1(V)$, so dass gilt:

$$F \circ \phi^{-1}(y) = (y, u(y)) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Bemerkung: Hat $DF(x_0)$ den Rang n, so ist $P \circ DF(x_0)$ invertierbar nach geeigneter Umnumerierung der Koordinaten.