Thema: Stetigkeit (X, Y metrische Räume)

$f: X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in X$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für $d(x, x_0) < \delta$

Folgenkriterium der Stetigkeit

$f: M \to Y$, $M \subset X$, $x_0 \in M$

Äquivalent sind:

(1) f ist stetig in x_0.

(2) Für jede Folge $x_k \in M$ mit $x_k \to x_0$ gilt:

$f(x_k) \to f(x_0)$.

Lipschitzstetigkeit mit Konstante $L < \infty$:

$f: M \to Y$: $d(f(x), f(x')) \leq L\, d(x, x')$.

Zu $\varepsilon > 0$ kann man dann $\delta = \varepsilon / L$ wählen.

Abstandsfunktion

$f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$

$x, x' \in X$.

$$f(x') = d(x', x_0) \leq d(x', x) + \underbrace{d(x, x_0)}_{= f(x)}$$

$$|f(x') - f(x)| \leq d(x', x)$$

Satz (Charakterisierung der stetigen Abbildungen)

Seien X, Y metr Räume, und $f: X \to Y$. Dann gilt

f ist stetig $\iff f^{-1}(V)$ offen für alle $V \subset Y$ offen.

Beweis „$\Longrightarrow$": Sei $V \subset Y$ offen, und $x_0 \in f^{-1}(V)$ sei gegeben.

$\Rightarrow y_0 = f(x_0) \in V$,

V offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(y_0) \subset V$.

f stetig $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0) \subset V \Rightarrow B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(V)$

„$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei gegeben.

Setze $y_0 = f(x_0)$.

$x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ = offen nach Vor.

$\exists \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$

$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(y_0))$. $\boxtimes$

Stetigkeit + Kompaktheit

<u>Definition</u> $M \subset (X, d)$ heißt kompakt

$\Leftrightarrow$ zu jeder Folge $x_k \in M$ gibt es eine Teilfolge $(x_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ und $x \in M$ mit $x_{k_p} \to x$ mit $p \to \infty$.

- Existenz von Extrema

$f: M \to \mathbb{R}$ stetig, M kompakt $\Rightarrow$ Infimum/Supr. werden angenommen

$(\Rightarrow f$ beschränkt$)$.

$f: M \to Y$ stetig, M kompakt $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

<u>Satz</u> (Bilder kompakter Mengen)

$f: M \to Y$, $M \subset X$ kompakt, f stetig.

$\Rightarrow f(M)$ kompakte Teilmenge von Y.

<u>Beweis</u> Sei $y_k \in f(M)$ beliebige Folge

$\exists x_k \in M: f(x_k) = y_k$

$\exists x_{k_p}$ und $x \in M: x_{k_p} \to x$

$\Rightarrow f(x_{k_p}) \to f(x) \in f(M)$.