

Höhere partielle Ableitungen

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad x \in \Omega$$

$$\partial_j f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(x + te_j) \right|_{t=0}$$

Sei nun $\partial_j f(x)$ definiert für alle $x \in \Omega$.

$$\partial_j f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \partial_j f(x)$$

$$\partial_{ij}^2 f(x) = \partial_i (\partial_j f)(x) \quad (\text{falls existiert})$$

$$\boxed{\text{FRAGE: } \partial_i (\partial_j f)(x) = \partial_j (\partial_i f)(x) \quad ?}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f(x) & \dots & \partial_{1n}^2 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}^2 f(x) & \dots & \partial_{nn}^2 f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Hessematrix

Beispiel $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\partial_1 f(0,y) = -y \quad \partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$$

$$\partial_2 f(x,0) = x \quad \partial_1 \partial_2 f(0,0) = +1.$$

Definition $C^k(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung } k \text{ existieren und sind stetig auf } \Omega \}$

$$\partial_{i_1 \dots i_k}^k f(x) = \partial_{i_1} (\partial_{i_2 \dots i_k} f)(x)$$

Satz (von H. A. Schwarz) Für $f \in C^2(\Omega)$

gilt $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Beweis Schritt 1 Eigenschaften von Differenzquotient.

Sei $g \in C^1(\Omega)$.

$$\partial_i g(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_i^s g(x) \quad \text{wobei} \quad \Delta_i^s g(x) = \frac{g(x + se_i) - g(x)}{s}.$$

Wir wollen den MWS anwenden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g(x + se_i) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + (s+h)e_i) - g(x + se_i)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + se_i + he_i) - g(x + se_i)}{h} \\ &= (\partial_i g)(x + se_i). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta_i^s g(x) = \partial_i g(x + \alpha se_i) \quad \text{für ein } \alpha \in [0, 1]. \quad (2)$$

$$\partial_i (\Delta_j^t g)(x) = \Delta_j^t (\partial_i g)(x). \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 \partial_i (\Delta_j^t g)(x) &= \frac{d}{ds} (\Delta_j^t g)(x + se_i) \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{d}{ds} \frac{g(x + se_i + te_j) - g(x + se_i)}{t} \Big|_{s=0} \\
 &= \frac{(\partial_j g)(x + te_j) - \partial_j g(x)}{t} \\
 &= \Delta_j^t (\partial_i g)(x),
 \end{aligned}$$

Schritt 2

$$\begin{aligned}
 \Delta_i^s (\Delta_j^t f) &\stackrel{(2)}{=} \partial_i (\Delta_j^t f)(x + s\alpha e_i) \quad (\alpha \in [0, 1]) \\
 &\stackrel{(3)}{=} \Delta_j^t (\partial_i f)(x + s\alpha e_i) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \partial_j (\partial_i f)(x + s\alpha e_i + t\beta e_j) \quad (\beta \in [0, 1])
 \end{aligned}$$

steht im Punkt x nach Vor.

(4) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta_i^s (\Delta_j^t f)(x) - \partial_j \partial_i f(x)| < \varepsilon$ für $0 < |s|, |t| < \delta$

Wir brauchen noch die andere Reihenfolge der Opa

$$\begin{aligned}
 \Delta_i^s (\Delta_j^t f)(x) &= \frac{\Delta_j^t f(x + se_i) - \Delta_j^t f(x)}{s} \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial_j f(x + se_i) - \partial_j f(x)}{s} = \Delta_i^s (\partial_j f)(x)
 \end{aligned}$$

Lasse in (4) $t \rightarrow 0$ gehen:

$$|\Delta_i^s (\partial_j f)(x) - \partial_j \partial_i f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } 0 < |s| < \delta.$$

$$\Rightarrow \partial_i (\partial_j f)(x) = \partial_j \partial_i f(x)$$

□

Beimerkung - $f \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f = \partial_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial_{i_{\sigma(k)}} f$$

$\sigma \in S_k$ = symmetrische Gruppe