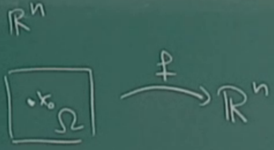


Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ hat in $x_0 \in \Omega$ die Ableitung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x-x_0))}{|x-x_0|} = 0$$

Fragen:

- Eindeutigkeit: könnte $(*)$ gelten für $A, B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit $A \neq B$?
- Berechnung: Wie können wir Ableitung A berechnen?

Wähle in $(*)$ $x = x_0 + tv$, mit $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Also $x - x_0 = tv$, und $x_0 + tv \to x_0$ mit $t \to 0$.

$$0 = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x_0+tv) - (f(x_0) + A(tv))}{|tv|} \right|$$

$$= \frac{1}{|v|} \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x_0+tv) - (f(x_0) + tAv)}{t} \right|$$

$$= \frac{1}{|v|} \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} - Av \right|$$

Satz Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in \Omega$ mit Ableitung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(1) In x_0 existieren alle Richtungsableitungen von f, und zwar

$$\partial_v f(x_0) = Av \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

(2) In x_0 existieren alle partiellen Ableitungen:

$$\partial_j f(x_0) = Ae_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

Bezüglich der Standardbasen hat A die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \cdots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Jacobimatrix von f im Punkt x_0.

(3) Die Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist durch $(*)$ eindeutig bestimmt.

Notation: $A = Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$

alternativ: $= df(x_0)$ (oft für $m=1$)

$f'(x_0)$ (hier nicht)

Strategie zur Berechnung der Ableitung.

1. Berechne partielle Ableitungen (und damit die Jacobimatrix A)
2. Prüfe $(*)$, wobei A die Jacobimatrix.

Beispiel $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (0, x_1x_2)$

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

$$f(x+h) - (f(x) + Df(x)h)$$
$$= (0, (x_1+h_1)(x_2+h_2)) - ((0, x_1x_2) + (0, x_2h_1 + x_1h_2))$$
$$= (0, h_1h_2)$$

$$\frac{|f(x+h) - (f(x) + Df(x)h)|}{|h|} \leq \frac{|h|^{\cancel{2}}}{\cancel{|h|}} \longrightarrow 0 \text{ mit } h \to 0.$$

Beispiel Lineare Abbildungen

Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$ mit $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Dann ist f in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar mit Ableitung A:

$$f(x+h) - (f(x) + Ah) = A(x+h) - (Ax + Ah) = 0.$$

Beispiel Quadratische Formen

Sei $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform.

Zugehörige quadratische Form. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} b(x,x)$

$$f(x+h) = \frac{1}{2} b(x+h, x+h) = \underbrace{\frac{1}{2} b(x,x)}_{= f(x)} + b(x,h) + \frac{1}{2} b(h,h).$$

Behauptung. f differenzierbar in x mit Ableitung $\underbrace{Df(x)}_{\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} h = b(x,h)$.

Abschätzung:

$$|f(x+h) - (f(x) + b(x,h))| = \frac{1}{2} |b(h,h)| \leq C |h|^2 \text{ mit Konstante } C.$$

$$\Big\lceil \text{denn: } |b(h,h)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} b(e_i, e_j) h_i h_j \right| \leq \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{n} |b(e_i, e_j)| \right)}_{=: C} \cdot |h|^2.$$

$\boxed{\text{1}}$

Beispiel Eindimensionale Funktionen.

Sei $f: I = (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x \in I$ (Analysis 1)

Die partielle Ableitung von f ist $f'(x) \in \mathbb{R}^m$.

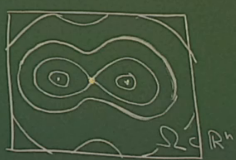
Jacobimatrix ist $Df(x) = f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Berechne für $h \to 0$.

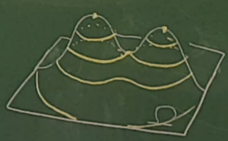
$$\left| \frac{|f(x+h) - (f(x) + Df(x) h)|}{|h|} \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \longrightarrow 0 \text{ mit } h \to 0$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.

Höhenlinienbild



Graph



Der Gradient von f im Punkt $x \in \Omega$ ist

$$\operatorname{grad} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) e_j = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}.$$

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Standardskalarprodukt.

$$\langle \operatorname{grad} f(x), e_j \rangle = \partial_j f(x) \overset{\text{Satz}}{=} Df(x) e_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$(**) \quad \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle = Df(x) v \qquad (v \in \mathbb{R}^n)$$

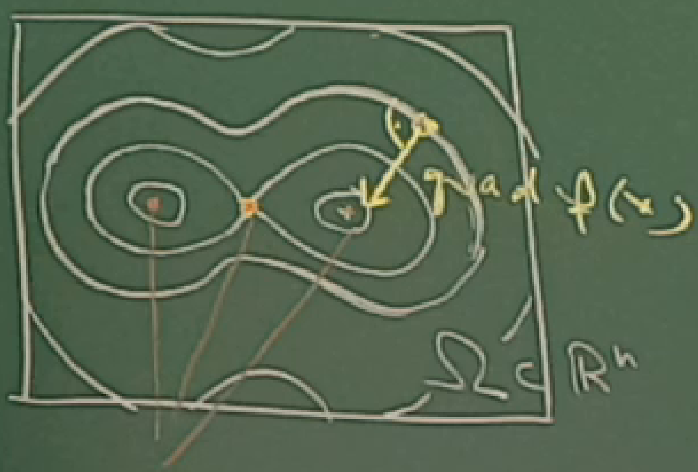
$\operatorname{grad} f(x) \neq 0$: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$

$$\partial_v f(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\leq} |\operatorname{grad} f(x)| \underbrace{|v|}_{=1}$$

$$v = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{|\operatorname{grad} f(x)|} : \text{ Gleichheit.}$$

Richtung von $\operatorname{grad} f(x)$ liefert stärksten Anstieg.

Höhenlinienbild



$\operatorname{grad} f(x) = 0$

kritische Punkte