

Analysis 2, #9: Kettenregel

Standardbasen

Vorbemerkung. Norm auf $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \stackrel{!}{=} \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : Ae_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} e_i \quad (j=1, \dots, n).$$

$$|A| = \left(\sum_{j=1}^n |Ae_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Es gilt die Abschätzung

(Euklidische Norm)
(Hilbert-Schmidt-Norm)

$$(3.7) \quad |Ax| \leq |A| |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

denn:

$$|Ax| = \left| \sum_{j=1}^n x_j Ae_j \right|$$

Dreiecks-
Ungl. $\leq \sum_{j=1}^n |x_j| |Ae_j|$

Cauchy-
Schwarz $\leq \left(\sum_{j=1}^n |Ae_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= |A| |x|.$$

Konvergenz: A Lipschitzstetig
mit Konstanten |A|.

$$|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leq |A| |x-y|.$$

Hinweis. alternativ Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|.$$

$f: \underbrace{\Omega}_{\subset \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar

in $x_0 \in \Omega$ mit Ableitung $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

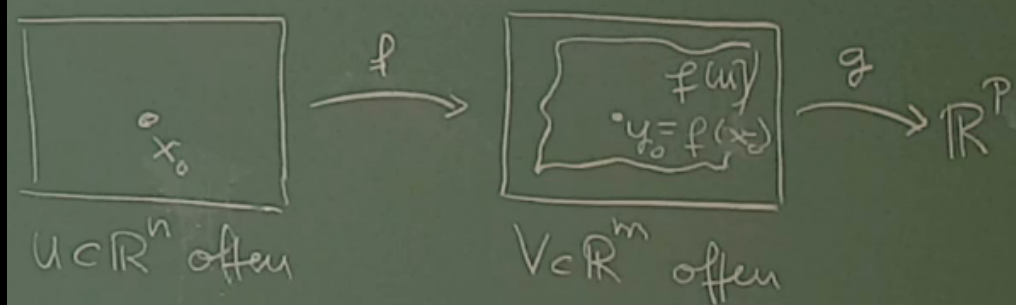
Satz f diff'bar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0 .

Beweis Setze $\varphi(x) = f(x) - \underbrace{(f(x_0) + A(x - x_0))}_{\text{stetig in } x_0 \text{ (siehe oben)}}$
Es reicht: $\varphi(x)$ stetig in x_0 .

$$\varphi(x_0) = 0$$

$$\varphi(x) = \underbrace{|x - x_0|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|}}_{\rightarrow 0 \text{ nach Vor.}} \rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0. \quad \square$$

Satz (Kettenregel)



Voraussetzung: f differenzierbar in x_0 , und $f(u) \in V$
 g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$.

Behauptung: $g \circ f$ differenzierbar in x_0 , und
 $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$
(Kettenregel).

In Koordinaten:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{p \times n} & \mathbb{R}^{p \times m} & \mathbb{R}^{m \times n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D(g \circ f)(x_0) & = & Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0) \end{array}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0)$$

$$(1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq n)$$

Beweis Setze $y_0 = f(x_0)$, $A = Df(x_0)$, $B = Dg(y_0)$.

Definiere $\varepsilon_f(z) = \frac{f(x_0+z) - (f(x_0) + Az)}{|z|}$

$$\varepsilon_f(z) = \frac{f(x_0+z) - (f(x_0) + Az)}{|z|} \quad \text{Es gilt } \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon_f(z) = 0. \quad (z \neq 0)$$

$$\varepsilon_g(\eta) = \frac{g(y_0+\eta) - (g(y_0) + B\eta)}{|\eta|}, \quad \text{also } \lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon_g(\eta) = 0. \quad (\eta \neq 0)$$

Setze $\varepsilon_g(0) = 0$, also ist ε_g stetig im Nullpunkt.

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_0+z) - ((g \circ f)(x_0) + BAz)}{|z|} &= \frac{g(\underbrace{f(x_0) + Az}_{=y_0} + |z| \varepsilon_f(z)) - (g(y_0) + BAz)}{|z|} \quad (\eta = Az + |z| \varepsilon_f(z)) \\ &= \frac{g(y_0 + |z| \varepsilon_f(z)) - (g(y_0) + B|z| \varepsilon_f(z))}{|z|} \\ &= B \varepsilon_f(z) + \frac{|z|}{|z|} \varepsilon_g(\eta) \leq |B| |\varepsilon_f(z)| + C |\varepsilon_g(\eta)| \rightarrow 0 \text{ mit } z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wir wissen: $|B \varepsilon_f(z)| \leq |B| |\varepsilon_f(z)| \rightarrow 0$ mit $z \rightarrow 0$.

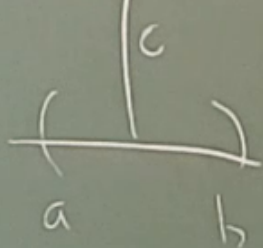
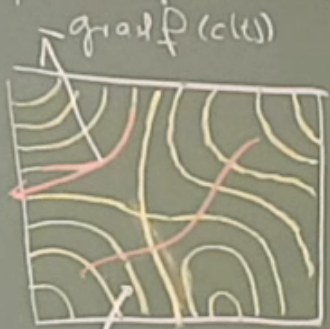
$\rightarrow 0$ mit $z \rightarrow 0$

□

$$|\eta| = |Az + |z| \varepsilon_f(z)| \leq |A| |z| + |z| |\varepsilon_f(z)| \leq C |z|$$

Spezialfall: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Kettenregel.

$n=2$



$$\frac{d}{dt} (f \circ c)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t)) \frac{dc_j}{dt}(t)$$

$$= Df(c(t)) c'(t)$$

$$= \langle \text{grad } f(c(t)), c'(t) \rangle.$$

Satz 3.4 (Komponentenweise Ableitung)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in $x_0 \in \Omega$ diffbar,
wenn alle Komponentenfkt. $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 diffbar sind,
und

$$\underbrace{Df(x_0)_i}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} = Df_i(x_0)$$

↑
i-te Zeile

Beweis Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei $A_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ die i-te Zeile.

Das bedeutet $(Ax)_i = A_i x \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow Df(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Äquivalenz von Konvergenz /

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_i(x) - (f_i(x_0) + A_i(x - x_0))}{|x - x_0|} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Koordinatenkonvergenz $\Leftrightarrow Df_i(x_0) = A_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$



Satz (Ableitungsregeln)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seien diffb in $x_0 \in \Omega$.

$\Rightarrow$ (a) Linearität: $D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

(b) Produktregel: $D(fg)(x_0) = Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$.

(c) Quotientenregel: $D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{Df(x_0)g(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beweis Setze $Df(x_0) = A, Dg(x_0) = B$.

$$\varepsilon_f(h) = \frac{f(x+h) - (f(x) + Ah)}{|h|}, \quad \varepsilon_g(h) = \frac{g(x+h) - (g(x) + Bh)}{|h|}$$

(a)
$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - ((\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha A + \beta B)h)}{|h|}$$
$$\alpha \frac{f(x+h) - (f(x) + Ah)}{|h|} + \beta \frac{g(x+h) - (g(x) + Bh)}{|h|} \rightarrow 0.$$

(b)
$$\frac{(fg)(x+h) - ((fg)(x) + (A g(x) + f(x) B)h)}{|h|}$$
$$= \frac{(\underline{f(x) + Ah} + |h| \varepsilon_f(h))(\underline{g(x) + Bh} + |h| \varepsilon_g(h)) - (\underline{f(x)g(x)} + \underline{g(x)Ah} + \underline{f(x)Bh})}{|h|}$$
$$= \underbrace{\varepsilon_f(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(g(x) + Bh)}_{|h| \leq |B||h|} + \underbrace{\varepsilon_g(h)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(f(x) + Ah)}_{|h| \leq |A||h|} + \underbrace{\varepsilon_f(h)\varepsilon_g(h)}_{\rightarrow 0} |h| + \underbrace{\frac{1}{|h|}(Ah)(Bh)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

(c) Quotientenregel

Es reicht der Fall $f \equiv 1$ (nimm $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, und Produktregel)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{Bh}{g(x)^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|h|} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left(g(x) - g(x+h) + \frac{g(x+h)}{g(x)} Bh \right) \\ &= \frac{1}{|h|} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left(-Bh - |h| \varepsilon_g(h) + \frac{g(x+h)}{g(x)} Bh \right) \\ &= \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left(\underbrace{\left(\frac{g(x+h)}{g(x)} - 1 \right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{Bh}{|h|}}_{\leq |B|} - \underbrace{\varepsilon_g(h)}_{\rightarrow 0} \right) \rightarrow 0 \quad (\text{beachte } g \text{ stetig in } x) \end{aligned}$$

Quotientenregel: $\frac{1}{g} = h \circ g$ wobei $h(y) = \frac{1}{y}$

Kettenregel: $D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = Dh(g(x)) Dg(x) = - \frac{Dg(x)}{g(x)^2}$

Produktregel: betrachte: $F(x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x) = (f(x), g(x))$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y_1, y_2) = y_1 y_2$$