

ABLEITUNGS KONZEPTE

	partiell diffbar	diffbar (total)
VERIFIKATION	einfach	Jacobimatrix / Grenzwert } schwierig
HIERARCHIE	-	implizit partiell diffbar
STETIGKEIT	- Bsp 2.2	+
LINEARITÄT	+	+
KOMPONENTENWEISE ABLEITUNG, PRODUKTREGEL	+	+
KETTENREGEL	-	+
GEOM. BILD	eingeschränkt	+

Rehabilitation der partiellen Ableitung (vollständig)

Satz (stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ diffbar)

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell diffbar ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen),
und $\partial_j f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ seien stetig in $x \in \Omega$.

Dann ist f in x (total) diffbar.

Beweis Wir können $n=1$ annehmen (Satz 3.4)

Sei $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ Jacobimatrix von f in x , also

$$(1) Ah = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) h_k \quad \text{für } h \in \mathbb{R}^n.$$

Wir müssen $f(x+h)$ mit $f(x) + Ah$ vergleichen.

Ziel Mittelwertsatz.

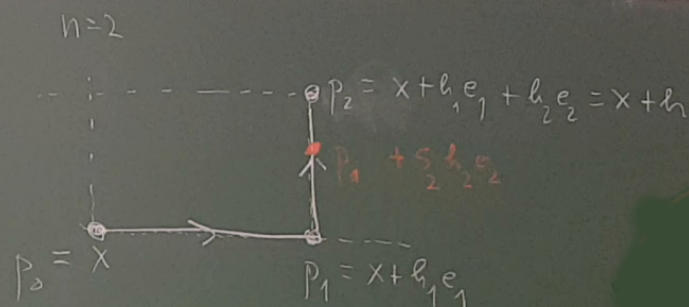
Problem: Ableitungen nur in Richtung der Koordinate.

Betrachte Ecken des Quaders

$$P_k = x + \sum_{j=1}^k h_j e_j \quad \text{für } k=0, 1, \dots, n$$

$$P_n = P_{n-1} + h_n e_n$$

Für $s_k \in [0, 1]$ geeignet gilt



$$(2) \quad f(P_k) - f(P_{k-1}) = \left. \frac{d}{ds} f(P_{k-1} + s h_k e_k) \right|_{s=s_k} \\ = (\partial_k f)(P_{k-1} + s_k h_k e_k) h_k$$

$$\Rightarrow |P_{k-1} + s_k h_k e_k - x| = \left| \sum_{j=1}^{k-1} h_j e_j + s_k h_k e_k \right| = |(h_1, \dots, h_{k-1}, s_k h_k, 0, \dots, 0)|$$

$$\frac{|f(x+h) - (f(x) + Ah)|}{|h|} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|h|} \left| \underbrace{\sum_{k=1}^n (f(P_k) - f(P_{k-1}))}_{= f(P_n) - f(P_0) = f(x+h) - f(x)} - \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) h_k \right|$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|h|} \left| \sum_{k=1}^n \left(\partial_k f(P_{k-1} + s_k h_k e_k) - \partial_k f(x) \right) h_k \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \underbrace{\partial_k f(P_{k-1} + s_k h_k e_k)}_{\rightarrow x \text{ mit } h \rightarrow 0} - \partial_k f(x) \right| \rightarrow 0 \quad (\text{da } \partial_k f \text{ stetig in } x)$$

Kalkül für stetig partiell diff'bl Fkt.

Satz Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$(a) f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$(b) f, g \in C^k(\Omega) \Rightarrow fg \in C^k(\Omega), \text{ sowie } \frac{f}{g} \in C^k(\Omega) \quad (\text{falls } g \neq 0 \text{ auf } \Omega)$$

$$(c) \text{ Sind } f \in C^k(U, \mathbb{R}^m), g \in C^k(V, \mathbb{R}^p) \text{ mit } U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen, } f(u) \in V \\ \Rightarrow g \circ f \in C^k(U, \mathbb{R}^p).$$

Beweis Induktion über k .

$k=0$: wohl bekannt.

$$k \geq 1: \partial_j(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial_j f + \beta \partial_j g \in C^{k-1} \text{ (Triviale)} \\ \partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in C^{k-1}$$

$$\partial_j\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\partial_j f)g - f(\partial_j g)}{g^2} \in C^{k-1}$$

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g, fg, \frac{f}{g} \in C^k$$

Beweis (c): g und f sind diff'bar (Satz 3.6)
 $g \circ f$ ist diff'bar (Kettenregel, Satz 3.3)

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \circ f \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \in C^{k-1}$$

$$\Rightarrow g \circ f \in C^k$$



ABLEITUNGS KONZEPTE

	partiell diffbar	diffbar (total)	stetig partiell diffb
VERIFIKATION	einfach	Jacobimatrix / Grenzwert	eher einfach
HIERARCHIE	-	Schwierig impliziert partiell diffb	impliziert diffbar
STETIGKEIT	- Bsp 2.2	+	+
LINEARITÄT	+	+	+
KOMPONENTENWEISE ABLEITUNG, PRODUKTREGEL	+	+	+
KETTENREGEL	-	+	+
GEOM. BILD	eingeschränkt	+	Siehe links