

Analysis 2, Video 11 . Erste Anwendungen

Informationen über $Df \rightarrow$ Eigenschaften von f ?

Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir zwei Argumente:

a) Mittelwertsatz

$$f(b) - f(a) = f'(\tau)(b - a) \text{ für ein } \tau \in (a, b).$$

b) Hauptsatz:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

Zu (a): • gilt so nicht für f vektorwertig:
 $f(t) = (\cos t, \sin t)$ auf $[0, 2\pi]$

$$f(2\pi) - f(0) = 0 = \underbrace{f'(\pi)}_{\neq 0} 2\pi$$

- Angenommen f hängt von weiteren Variablen ab. Dann hängt τ ebenfalls von diesen Variablen ab.
MWS liefert keine Kontrolle,

In (b): Wir brauchen $f \in C^1([a, b])$,

oder zumindest stückweise C^1 .

$$\exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b:$$

f in C^1 auf (t_{i-1}, t_i)

Grenzwerte $f'_{\pm}(t_i)$ existieren

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^N (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t) dt = \int_a^b f'(t) dt. \end{aligned}$$

Idee: Werte f längs Kurven aus!

Lemma Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ stetig und stückweise C^1 .

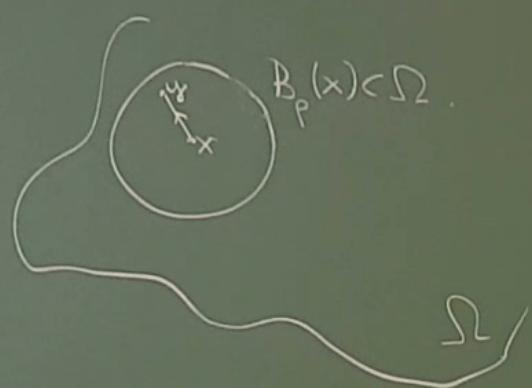
Dann gilt für $f \in C^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt \\ &= \int_a^b Df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \end{aligned}$$

Satz (Konstanzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend.

$Df(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \implies f$ ist konstant.

Beweis



Zu $x \in \Omega \quad \exists p > 0: B_p(x) \subset \Omega$.

Zeige: f ist konstant auf $B_p(x)$.

Sei $\gamma(t) = x + t(y-x)$, für $t \in [0, 1]$.

Es gilt $\gamma(t) \in B_p(x) \quad \forall t \in [0, 1]$.

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \underbrace{Df(\gamma(t))}_{=0} \gamma'(t) dt = 0.$$

f ist lokal konstant $\xrightarrow{\Omega \text{ z.h.}} \text{konstant}$.

□

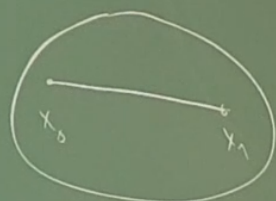
quantitativ

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Sei $f \in C^1(\Omega)$
mit $|Df(x)| \leq L \quad \forall x \in \Omega$

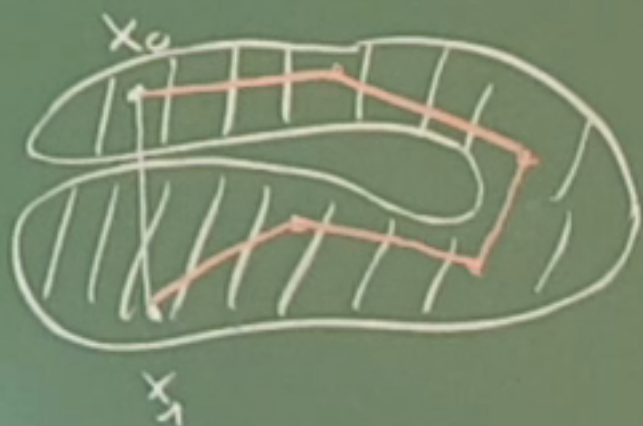
Ω konvex $\Leftrightarrow$

$x_0, x_1 \in \Omega \Rightarrow \{x_0 + t(x_1 - x_0) : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$



Ω konvex.

$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \leq L |x_1 - x_0| \quad \forall x_0, x_1 \in \Omega.$
(f Lipschitz mit konstante L)



nicht konvex

Beweis $\gamma(t) = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| = \left| \int_0^1 Df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |Df(\gamma(t)) \underbrace{\gamma'(t)}_{x_1 - x_0}| dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \underbrace{|Df(\gamma(t))|}_{\leq L} dt \right) |x_1 - x_0| \leq L |x_1 - x_0| \end{aligned} \quad \square$$

Satz Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Dann gibt es zu $K \subset \Omega$ kompakt eine Konstante $L < \infty$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in K$$

(f lokal Lipschitz)

Beweis (indirekt) Andernfalls gibt es zu $k \in \mathbb{N}$

Punkte $x_k, y_k \in K$ mit

$$|f(x_k) - f(y_k)| > k |x_k - y_k|$$

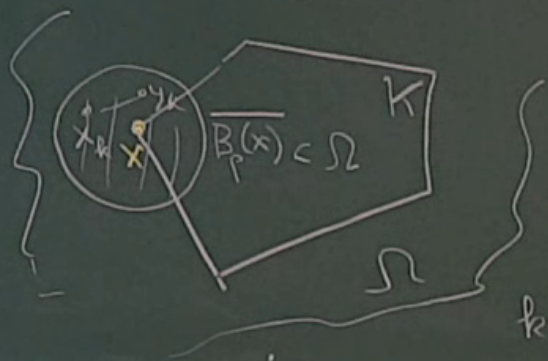
Da f stetig auf K , gibt es ein $M < \infty$ mit

$$|f(x)| \leq M \quad \text{für alle } x \in K$$

Ohne Einschränkung $x_k \rightarrow x \in K$ (noch Wahl einer Teilfolge)
Es gilt

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} |f(x_k) - f(y_k)| \leq \frac{2M}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{mit } k \rightarrow \infty$$

Es folgt $y_k \rightarrow x$ mit $k \rightarrow \infty$.



$$\exists p > 0: \overline{B_p(x)} \subset \Omega$$

$$\exists L < \infty: |Df(y)| \leq L \quad \text{auf } \overline{B_p(x)}$$

Aus Satz vorher folgt

$$k |x_k - y_k| < |f(x_k) - f(y_k)| \leq L \underbrace{|x_k - y_k|}_{\neq 0}$$