

Extremwerte

Kriterien

Satz Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Hat

f ein lokales Extremum in $x \in \Omega$

und ist f in x differenzierbar,

so folgt $Df(x) = 0$.

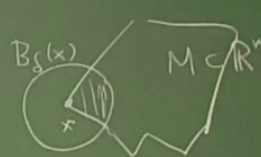
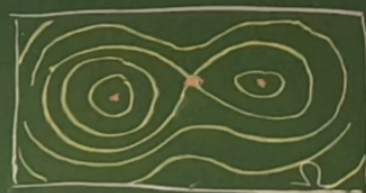
Beweis

$$0 = \frac{d}{dt} f(x+tv) \Big|_{t=0} = Df(x)v \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

ANNA!



$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(y) \geq f(x) \quad \forall y \in M \cap B_S(x)$$

$$\boxed{\text{Kritische Punkte } x \in \Omega: Df(x) = 0}$$

Zweite Ableitung (für $f \in C^2(\Omega)$)

Def (als Bilinearform) $D^2f(x): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $D^2f(x)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x) v_i w_j$ (symmetrisch)

(als Matrix: $(\partial_{ij}^2 f(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hesse matrix (symmetrisch))

Zweite Ableitung von f längs Kurven

$f \in C^2(\Omega)$ und $\gamma: I \rightarrow \Omega$, $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)''(t) &= \frac{d}{dt} (Df(\gamma(t)) \gamma'(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j'(t) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{ij}^2 f(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) + \sum_{j=1}^n \partial_j f(\gamma(t)) \gamma_j''(t) = D^2f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + Df(\gamma(t)) \gamma''(t) \end{aligned}$$

Lemma Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - \left(f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2} D^2f(x)(h, h) \right)}{|h|^2} = 0$$

Beweis Betrachte $\gamma(t) = x + th$ ($t \in [0, 1]$)

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(x+th)h$$

$$(f \circ \gamma)''(t) = D^2f(x+th)(h, h)$$

$$f(x+th) = f(\gamma(t))$$

Hauptsatz

$$= f(\gamma(0)) + \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt$$

$$1 = \frac{d}{dt} (t-1)$$

$$\begin{aligned}
 (\text{partielle Integration}) &= f(x(0)) + \left[(t-1)(f \circ r)'(t) \right]_{t=0}^{t=1} \\
 &\quad - \int_0^1 (t-1)(f \circ r)''(t) dt \quad < \varepsilon \text{ f\"ur } |h| < \delta \\
 &= \boxed{f(x) + Df(x)h + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h, h)} + \int_0^1 (1-t) \underbrace{\left(D^2 f(x+h) - D^2 f(x) \right)(h, h)}_{< \varepsilon |h|^2} dt
 \end{aligned}$$

Satz (Grundzustand) Sei $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 Symmetrische Bilinearform auf n -dim.
 Euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Setze

$$\lambda = \inf \{ b(v, v) : \|v\| = 1 \}.$$

Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $b(v, v) = \lambda$.

Beweis Schritt 1 $V = \mathbb{R}^n$ mit Standard Skalarprodukt.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist beschränkt, abgeschlossen,
 also kompakt.

$$b(x, x) = \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad \text{mit } b_{ij} = b(e_i, e_j)$$

Schritt 2 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ beliebig $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Wähle Orthonormalbasis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V . (Gram-Schmidt)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze $x_B = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V$. Es gilt $\|x_B\| = |x|$.

Definiere $b_B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $b_B(x, y) = b(x_B, y_B)$

b_B ist symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$

$$\inf \{ b(v, v) : v \in V, \|v\| = 1 \} = \inf \{ b_B(x, x) : x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1 \} = \lambda$$

x gegeben $\leftrightarrow$ wähle $v = x_B$: $b(v, v) = b(x_B, x_B) = b_B(x, x)$

$$\begin{array}{|l} \exists x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1, b_B(x, x) = \lambda \\ \text{Setze } v = x_B \\ \Rightarrow b(v, v) = \lambda \end{array}$$

Begriff: Eine symmetrische Bilinearform auf V heißt

positiv semidefinit : $b(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
 $b \geq 0$

positiv definit : $b(v, v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$
 $b > 0$

$$\begin{array}{l} b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ b(e_1, e_1) = 1 > 0 \\ b(e_2, e_2) = -1 < 0 \end{array}$$