Extremwerte (Fortsetzung)

Satz (lokale Extrema)

Sei $f \in C^2(\Omega)$, und $Df(x) = 0$

(a) f hat in x ein lokales Minimum

$\Rightarrow D^2 f(x)$ ist positiv semidefinit.

(b) $D^2 f(x)$ positiv definit

$\Rightarrow f$ hat in x ein isoliertes lokales Minimum.

Beweis

(a) Wir wissen: $t \mapsto f(x+tv)$ hat ein lokales Minimum in $t=0$. (für alle $v \in \mathbb{R}^n$)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0} = D^2 f(x)(v,v)$$

(das ist die Beh)

(b)
$$\varepsilon(h) := \frac{f(x+h) - \left(f(x) + \cancel{Df(x)h} + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h)\right)}{|h|^2} \longrightarrow 0 \text{ (mit } h \to 0)$$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2} \underbrace{D^2 f(x)(h,h)}_{>0 \text{ für } h \neq 0} + \underbrace{|h|^2 \varepsilon(h)}_{\text{kein Vorzeichen}}$$

quantifizieren!

Satz (Grundzustand): $\exists\, w \in \mathbb{R}^n,\ |w| = 1$,

$$\lambda := \inf_{|v|=1} D^2 f(x)(v,v) = D^2 f(x)(w,w) > 0 \ (\text{Vor.})$$

$$D^2 f(x)(h,h) = |h|^2 \underbrace{D^2 f(x)\left(\frac{h}{|h|}, \frac{h}{|h|}\right)}_{\geq \lambda} \geq \lambda |h|^2$$

$$\Rightarrow f(x+h) \geq f(x) + \underbrace{\left(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon(h)\right)}_{>0} |h|^2 > f(x) \text{ für } 0 < |h| < \delta.$$

Extremwerte

$\left(\begin{array}{l}\text{Orthonormalbasis}\\ \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\end{array}\right)$

Satz (Hauptachsentransformation)

Sei $b: V\times V \to \mathbb{R}$ Bilinearform auf Euklidischem Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der $\dim V = n$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ und Zahlen $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ mit $b(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$.

Schritt 1 Sei $v \in V$, $\|v\| = 1$, ~~der~~ ein Grundzustand.

$$b(v,v) = \inf_{\|w\|=1} b(w,w) =: \lambda \quad \text{Dann gilt}$$

$$(*) \quad b(v,w) = \lambda \langle v, w\rangle \quad \forall w \in V$$

Die Menge der $w \in V$ mit $(*)$ ist ein Unterraum von V.

$(*)$ gilt für $w = v$: per Definition.

$(*)$ gilt für $w \perp v$: OE $\|w\| = 1$

$$\|(\cos t)v + (\sin t)w\| = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

$$0 = \frac{d}{dt} b\big((\cos t)v + (\sin t)w, (\cos t)v + (\sin t)w\big)\Big|_{t=0}$$

$$\Rightarrow 0 = b(v,w) + b(w,v) = 2\, b(v,w)$$

$$\Rightarrow b(v,w) = 0 = \lambda \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} \quad (\text{also } (*))$$

w beliebig $\quad w = \underbrace{\langle w, v\rangle v}_{\sim v} + \underbrace{w - \langle w, v\rangle v}_{\perp v} \Rightarrow (*)$ gilt für alle $w \in V$.

<u>Schritt 2</u> Beweis durch Induktion

Seien $v_1, \dots, v_k$ orthonormal und $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_k$ mit

$(**)$ $b(v_i, w) = \lambda_i \langle v_i, w\rangle$ für $i = 1, \dots, k$.

Für $k=1$ gezeigt mit $v_1 = v$ (Grundzustand) und $\lambda_1 = \lambda$.

Setze $V_k = \{v_1, \dots, v_k\}^\perp$. Wähle $v_{k+1} \in V_k$, $\|v_{k+1}\| = 1$:

$$b(v_{k+1}, v_{k+1}) = \inf_{w \in V_k,\ \|w\|=1} b(w,w) =: \lambda_{k+1}.$$

Zeige $(**)$:

<u>Fall 1</u> $w \in V_k$

gleiche Situation wie in Schritt 1, jetzt mit V_k statt V

$(*)$ besagt: $b(v_{k+1}, w) = \lambda_{k+1} \langle v_{k+1}, w\rangle$ ✓

<u>Fall 2</u> $w = v_i$ mit $1 \le i \le k$

$$b(v_{k+1}, w) = b(v_i, v_{k+1}) \overset{(**)}{=} \lambda_i \langle v_i, v_{k+1}\rangle = 0 = \lambda_{k+1}\langle v_{k+1}, w\rangle \checkmark$$

Induktion $\Longrightarrow$ $(**)$ bewiesen für v_{k+1}

<u>Bem 1</u> (<u>Lineare Algebra</u>)

Sei V Euklidischer Vektorraum, und $B \in L(V)$

B heißt symmetrisch $\Leftrightarrow$ $b(v,w) = \langle Bv, w\rangle$ symmetrisch

Seien $v_1, \dots, v_n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie im Satz. Nach $(**)$ gilt

$$0 \overset{(**)}{=} b(v_i, w) - \lambda_i \langle v_i, w\rangle = \langle \underbrace{Bv_i - \lambda_i v_i}_{=0}, w\rangle \quad \forall w$$

$Bv_i = \lambda_i v_i$ (λ_i Eigenwerte, B diagonalisierbar durch ONB)

Ausblick: $V = \{u \in C^\infty([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$

Wir betrachten $u \in V$ als Auslenkung einer Saite (Zustand)

Skalarprodukt: $\langle u, v\rangle = \int_0^\pi uv$

lineare Abbildung: $B: V \to V$, $Bu = -u''$ (Warning)

$$\langle Bu, v\rangle = -\int_0^\pi u''v = \underbrace{-[u'v]_0^\pi}_{=0} + \underbrace{\int_0^\pi u'v'}_{\text{symmetrisch in } u,v}$$

$$Bu = \lambda u, \quad u \in V \ ?$$

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

Lösungen: $\begin{cases} u_k(x) = \sin(kx), & k \in \mathbb{N} \\ \lambda_k = k^2 \end{cases}$