

Eine Funktion $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grad k , falls $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ existieren mit $a_k \neq 0$

$$P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{P}_k = \{ \text{Polynome vom Grad} \leq k \}$ ist Vektorraum.

Es gilt: für $x_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Pot $1, x-x_0, \dots, (x-x_0)^k$ linear eine Basis von $\mathbb{P}_k$.

Beweis $\dim \mathbb{P}_k \leq k+1$. zu zeigen: linear unabhängig!

da: $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x-x_0)^j \Rightarrow \left(\frac{d}{dx} \right)^j P(x) \Big|_{x=x_0} = j! a_j$

P Nullfunktion $\Rightarrow a_j = 0$ für $j=0, \dots, k$.
 $\Rightarrow$ lin. unabl. □

Spezialfall

$k=0$: $P(x) = f(x_0)$ (konstant)
 $f(x) - P(x) \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow x_0$

$k=1$: $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$\frac{f(x) - P(x)}{x-x_0} \rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0$$

$k=2$

Fragestellung der Taylorapproximation:

$f \in C^k(I)$ Sei $P(x)$ Polynom vom Grad k , so dass P in x_0 mit f übereinstimmt bis Ordnung k :

$$P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \text{ für } i=0, 1, \dots, k$$

Aufgabe: asymptotisches Verhalten von $f - P$ für $x \rightarrow x_0$

Lemma Sei $I = (a, b)$, $x_0 \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Zu $f \in C^k(I)$ gibt es genau ein Polynom

$P \in \mathbb{P}_k$ mit $P^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, \dots, k$
und zwar

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

P_k heißt Taylorpolynom der Ordnung k von f
mit Entwicklungspunkt x_0 .

Beweis P_k hat die gewünschte
Eigenschaft.

Sei $P \in \mathbb{P}_k$ mit $P^{(j)}(x_0) = 0 \forall j = 0, \dots, k$

P hat eine Darstellung

$$P(x) = \sum_{j=0}^k a_j (x-x_0)^j$$

$\Rightarrow a_j = 0$ für $j = 0, 1, \dots, k$

$\Rightarrow P = \text{Nullpolynom}$. □

Die Funktion

$$R_k: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(x) = f(x) - P_k(x)$$

heißt Restglied k -ter Ordnung in x_0

Knickpunkt, R_k abschätzen!

Satz (Integraldarstellung von R_k)

Sei $f \in C^{k+1}(\mathbb{I})$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy$$

Beweis Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$

$$k=0: R_0(x) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(y) dy \quad \checkmark$$

$$k \geq 1: f(x) = P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_{x_0}^x (x-y)^{k-1} f^{(k)}(y) dy$$

partielle
Integration

$$= P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \left(\left[-\frac{(x-y)^k}{k} f^{(k)}(y) \right]_{y=x_0}^{y=x} + \int_{x_0}^x \frac{(x-y)^k}{k} f^{(k+1)}(y) dy \right)$$

$$= \underbrace{P_{k-1}(x) + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{= P_k(x)} + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy$$

Lagrange-Darstellung von R_k

$I = (a, b), x_0 \in I$
 $k \in \mathbb{N}_0$

$f \in C^{k+1}(I)$. Zu $x_0, x \in I$ gibt es ein ξ zwischen x_0, x :

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$$

MWS oder
Integralrechnung
mit Gewicht.

Beweis

Sei oBdA $x > x_0$. Wende an auf $[x_0, x]$
und $\varphi(y) = (x-y)^k$

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k dy$$

$f \in C^0(I), \varphi \in C^0(I)$ mit $\varphi \geq 0$

$$\exists \xi \in I: \int_I f \varphi = f(\xi) \int_I \varphi$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!} \left[-\frac{(x-y)^{k+1}}{k+1} \right]_{y=x_0}^{y=x} = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$$

Satz (Integraldarstellung)

Sei $f \in C^{k+1}(I)$ für

$$R_k(x) = \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy$$

Beweis Induktion über

$$k=0: R_0(x) = f(x) - f(x_0)$$

Beispiel

$$f: (-1, 1); f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}}, f''(x) = \frac{3}{4} (1-x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$x_0 = 0: f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2} x^2 = \frac{3}{8} (1-\xi)^{-\frac{5}{2}} x^2 \quad (\xi \in [0, x])$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{f''(\xi)}{2} \beta^4 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \Delta E$$

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}} = f''(\xi) \beta^2 \leq f''(\beta^2) \beta^2$$