

Analysis 2, #14: Taylorentwicklung.

$x_0 \in I$ offenes Intervall, $f \in C^k(I)$ für $k \in \mathbb{N}_0$

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

$$P_k^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \text{ für } j=0, \dots, k$$

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x) \text{ Approximationsfehler}$$

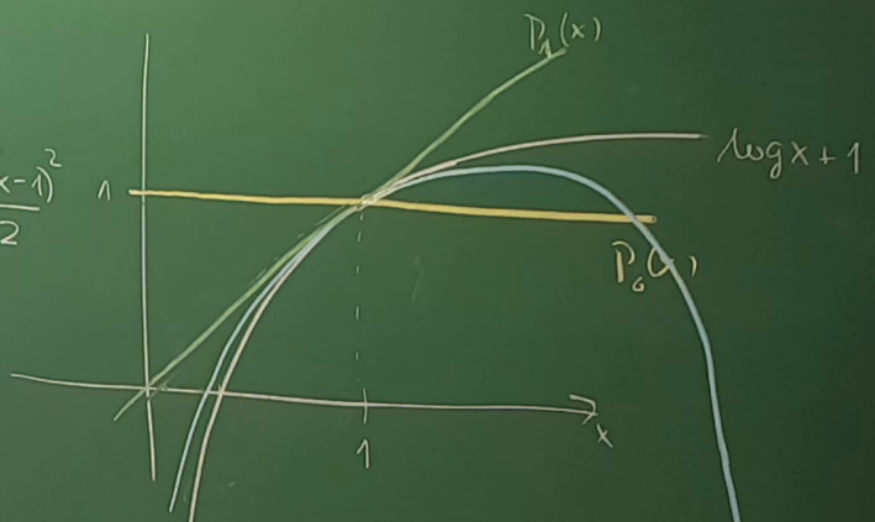
= Restglied

Beispiel $f(x) = \log x + 1$ bei $x_0 = 1$

$$f(1) = 1 \quad P_0(x) = 1$$

$$f'(1) = 1 \quad P_1(x) = 1 + (x-1)$$

$$f''(1) = -1 \quad P_2(x) = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$$



Landau-Symbole

f, g Funktionen, definiert für $0 < |x - x_0| < \delta$.

Sei $g(x) \neq 0$ für x nahe bei x_0 .

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

Wir wollen gerade zeigen:

$$f(x) = P_k(x) + o((x-x_0)^k) \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} \rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0$$

BEWEIS:

$$x_0. \quad \frac{f(x) - P_k(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{\overbrace{f(x) - P_{k-1}(x)}^{= R_{k-1}(x)}}{(x-x_0)^k} - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \cancel{(x-x_0)^k}}{\cancel{(x-x_0)^k}} - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \\ &\quad \text{(Restglied)} \\ &\quad \text{Lagrange} \end{aligned}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x .

$$\rightarrow 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0.$$

Das k -te Taylorpolynom P_k ist das einzige Polynom in Π_k ($= \text{grad} \leq k$ Polynome) mit

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^k} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0).$$

Zu zeigen: ist $P \in \Pi_k$ mit $\frac{P(x)}{(x-x_0)^k} \rightarrow 0$ mit x_0

dann ist P das Nullpolynom.

per Induktion: $a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0$. (Koeffizienten von P)

$a_0 = 0$: klar.

Sei schon $a_0 = a_1 = \dots = a_{j-1} = 0$ für ein $1 \leq j \leq k$.

$$\Rightarrow a_j = \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{-j} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(x-x_0)^{-j} (x-x_0)^k}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\frac{P(x)}{(x-x_0)^k}}_{\rightarrow 0 \text{ nach Vor.}} = 0$$