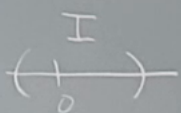


Potenzreihen

Motivation. $f \in C^\infty(I)$, $I = \text{offenes Intervall}$, $0 \in I$



P_k k -te Taylorpolynom von f , Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j \quad (\text{Folger von Polynomen})$$

bisher: k fest, $x \rightarrow 0$

- konvergieren die $P_k(x)$ gegen eine Grenzfunktion mit $k \rightarrow \infty$?
- ist diese Grenzfunktion gleich f ?

Definition komplexe Potenzreihe ist $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ($a_k \in \mathbb{C}$)

klar: $P(0) = a_0$ immer

• könnte sein, dass P_k für $z \neq 0$ nie konvergiert, $\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$ (Nullfolgenkriterium)

Lemma (von Abel) Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Es gebe ein $z_0 \neq 0$

und $M \in [0, \infty)$ mit $|a_k| |z_0|^k \leq M$. Dann ist $P(z)$

für $|z| < |z_0|$ absolut konvergent. Genauer

$$|P(z) - P_k(z)| \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} |a_l| |z|^l \leq \frac{M}{1 - \frac{|z|}{|z_0|}} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^{k+1}$$

Beweis $|z| < |z_0| \Rightarrow |a_k z^k| = |a_k| |z_0|^k \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^k \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^k$

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz nach Majoranten

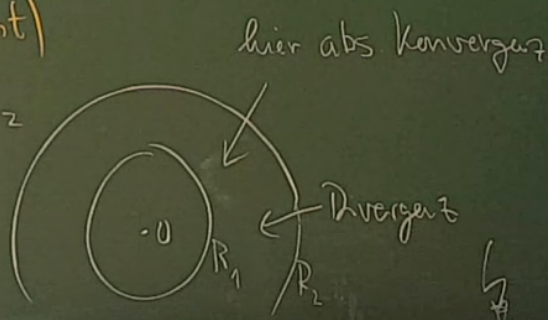
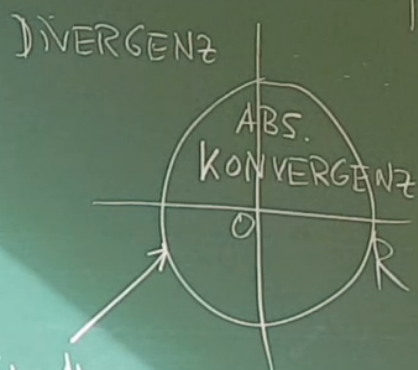
$$|P(z) - P_k(z)| = \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} a_l z^l \right|$$

$$\leq \sum_{l=k+1}^{\infty} |a_l| |z|^l \leq M \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^l = M \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^{k+1} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|z_0|}}$$

Satz vom Konvergenzradius Zu jeder Potenzreihe $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es genau ein $R \in [0, \infty]$ mit:

$P(z)$ ist $\begin{cases} \text{absolut konvergent f\"ur } |z| < R \\ \text{divergent f\"ur } |z| > R. \\ \text{(nicht konvergent)} \end{cases}$

Eindeutigkeit $R_1 < R_2$



Ich definiere

$$R = \sup \{ |z| : P(z) \text{ konvergiert} \} \in [0, \infty]$$

$|z| < R$: $\exists z_0$ mit $|z| < |z_0| \leq R$, so dass $P(z_0)$ konvergiert
 $\Rightarrow |a_k| |z_0|^k \rightarrow 0$ (Nullfolgenkriterium)

Aber $\Rightarrow P(z)$ konvergiert absolut.

$|z| > R$: $\Rightarrow P(z)$ ist divergent.



Beispiel Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

Quotientenkriterium für $z \neq 0$:

$$\frac{|z^{k+1}/(k+1)!|}{|z^k/k!|} = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0 \text{ mit } k \rightarrow \infty.$$

$$\boxed{R = \infty}$$

Beispiel $B_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots$ (Binomialreihe)

bricht ab wenn $\alpha \in \mathbb{N}_0$

Für $z \neq 0$ ist $a_k = \binom{\alpha}{k} z^k \neq 0$ und

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|\alpha-k|}{k+1} |z| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |z|$$

abs. konvergent für $|z| < 1$
Divergent für $|z| > 1$ } $R = 1$.

Beispiel $f_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \begin{cases} 1-kx & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Es gilt

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

f ist nicht stetig bei $x=0$.

→ gleichmäßige Konvergenz: $\|f_k - f\|_I = \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Satz (gleichmäßige Konvergenz $\Rightarrow$ Stetigkeit)

Seien $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$, stetig auf $D \subset \mathbb{R}^n$.

Falls f_k gleichmäßig gege. $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ konvergiert,
so ist f auch stetig auf D .

Beweis Sei $x_0 \in D$ gegeben. Für $x \in D$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x) - f_k(x)|}_{\leq \|f_k - f\|_D} + |f_k(x) - f_k(x_0)| + \underbrace{|f_k(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \|f_k - f\|_D} \\ &\leq 2\|f_k - f\|_D + |f_k(x) - f_k(x_0)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f_k - f\|_D \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ mit } x \rightarrow x_0, \text{ da } f_k \text{ stetig.}$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0, \text{ also } f \text{ stetig in } x_0. \quad \square$$

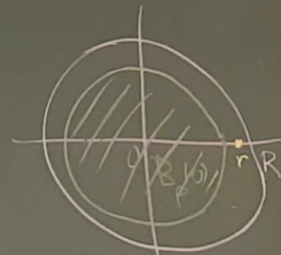
Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$

Dann ist $P(z)$ stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Beh. $P_k(z)$ konvergieren gleichmäßig gegen $P(z)$ auf $B_p(0)$ mit $p < R$.

Da $P(z)$ konvergiert, gilt $|a_k| r^k \leq M < \infty \quad \forall k$

Aufg. $\|P - P_k\|_{C^0(B_p(0))} \leq \frac{M}{1 - \frac{p}{r}} \left(\frac{p}{r}\right)^{k+1} \rightarrow 0 \text{ mit } k \rightarrow \infty$



Sei $r \in (p, R)$ beliebig gewählt